# 1

Si calcoli l'integrale

$$\oint_{\gamma_{0,1}} \sin\left(\frac{1}{2z+1}\right) dz \ ,$$

dove $\gamma_{0,1}$ è il cerchio unitario orientato positivamente.

**Soluzione 1:** Stiamo integrando sul cerchio unitario per cui $|z| = 1$ e quindi possiamo usare la seguente espansione in serie di Taylor-Laurent centrata in $z = 0$, che converge per $|z| > \frac{1}{2}$ [1]

$$\frac{1}{2z+1} = \frac{1}{2z}\frac{1}{1+1/(2z)} = \frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2z}\right)^n = \frac{1}{2z} + \mathcal{O}\left(z^{-2}\right) \ .$$

La correzione $\mathcal{O}\left(z^{-2}\right)$ denota che dopo il termine $\frac{1}{2z}$ tutte le altre potenze sono potenze negative di $z$ con esponente $\leq -2$. Per il seno abbiamo l'espansione in serie

$$\sin w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} w^{2k+1} \ .$$

Sostituendo all'argomento l'espansione trovata sopra, troviamo

$$\sin\left(\frac{1}{2z+1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{1}{2z} + \mathcal{O}\left(z^{-2}\right)\right)^{2k+1} = \frac{1}{2z} + \mathcal{O}\left(z^{-2}\right) \ ,$$

in cui il termine $\frac{1}{2z}$ viene da $k = 0$ nella somma, e tutti i $k > 0$ danno luogo solo a potenze più negative di $z$. Possiamo quindi utilizzare il risultato che l'integrale su un cerchio centrato in $z = 0$ di una potenza intera $z^n$ è pari a $2\pi i$ per $n = -1$ e 0 per qualsiasi intero $n \neq -1$. Pertanto commutando la serie con l'integrale[2] troviamo che solo il termine $\frac{1}{2z}$ dà un risultato non nullo

$$\oint_{\gamma_{0,1}} \left(\frac{1}{2z} + \mathcal{O}\left(z^{-2}\right)\right) dz = \oint_{\gamma_{0,1}} \frac{1}{2z} dz = \frac{1}{2} 2\pi i = \pi i \ .$$

**Soluzione 2:** Usando il teorema di Cauchy, possiamo deformare il cammino senza cambiare il valore dell'integrale fino a renderlo un cerchio di raggio infinitesimo $\epsilon$ centrato in $z = -\frac{1}{2}$, che è l'unico punto di non olomorfia interno al cammino iniziale. Chiamiamo il cammino così ottenuto $\gamma_{-\frac{1}{2},\epsilon}$. In ogni punto di $\gamma_{-\frac{1}{2},\epsilon}$ possiamo espandere la funzione in serie di Taylor-Laurent attorno al punto $z_0 = -\frac{1}{2}$. Notiamo che $z - z_0 = z + \frac{1}{2}$ e quindi tale espansione si ottiene immediatamente usando la serie che definisce il seno

$$\sin\left(\frac{1}{2z+1}\right) = \sin\left(\frac{1}{2(z+\frac{1}{2})}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{1}{2^{2k+1}}\left(z+\frac{1}{2}\right)^{-2k-1} \ .$$

[1] Ricorda che $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ per $|a| < 1$.

[2] Questo è possibile perché l'integrale della serie dei moduli converge.

Notiamo che l'espansione così ottenuta ha solo potenze negative. A questo punto commutiamo la serie con l'integrale, e usiamo che solo il termine $k = 0$ con $z - z_0 = z + \frac{1}{2}$ alla potenza $-1$ contribuisce, come si vede utilizzando la formula integrale di Cauchy

$$\oint_{\gamma_{-\frac{1}{2},\epsilon}} \left(z + \frac{1}{2}\right)^{-2k-1} dz = \frac{2\pi i}{(2k)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{2k} 1|_{z=-\frac{1}{2}} \ ,$$

oppure analogamente cambiando variabile da $z$ a $w = z + \frac{1}{2}$ e usando che l'integrale di $w^n$ su un cerchio centrato in $w = 0$ dà contributo solo per $n = -1$. Perciò abbiamo

$$\oint_{\gamma_{0,1}} \sin\left(\frac{1}{2z+1}\right) dz = \oint_{\gamma_{-\frac{1}{2},\epsilon}} \sin\left(\frac{1}{2z+1}\right) dz = \frac{1}{2} \oint_{\gamma_{-\frac{1}{2},\epsilon}} \left(z + \frac{1}{2}\right)^{-1} dz = \frac{1}{2} 2\pi i = \pi i \ .$$

# 2

Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{2 + \cos\theta} d\theta \ .$$

**Soluzione:** Vogliamo riscrivere questo integrale come integrale sul cerchio unitario $|z| = 1$ nel piano complesso $z$. A tal fine, scegliamo la parametrizzazione del cerchio unitario $z = e^{i\theta}$, con $\theta \in [0, 2\pi[$. Pertanto si ha

$$dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta \quad \Rightarrow \quad d\theta = -i\frac{dz}{z} \ .$$

Inoltre vale

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z} \ .$$

Dunque abbiamo che

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{2 + \cos\theta} d\theta = \oint_{\gamma_{0,1}} \frac{z^2+1}{2z} \frac{1}{2 + (z^2+1)/2z} \frac{-i}{z} dz = -i \oint_{\gamma_{0,1}} \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 4z + 1)} dz \ ,$$

dove $\gamma_{0,1}$ è il cerchio unitario orientato positivamente. A questo punto dobbiamo individuare i punti di non olomorfia della funzione interni al cammino, ovvero dentro il cerchio unitario. A tal fine controlliamo dove si annulla il polinomio al denominatore

$$z(z^2 + 4z + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 0 \ , \quad z = -2 \pm \sqrt{3} \ .$$

Dato che $\sqrt{3} \approx 1.7$, il punto di non olomorfia $-2-\sqrt{3}$ è esterno al cerchio unitario, mentre i punti $0$ e $-2+\sqrt{3}$ sono interni al cerchio unitario. Usando il teorema di Cauchy, possiamo deformare il cammino di integrazione da $\gamma_{0,1}$ all'unione di un cerchio di raggio infinitesimo $\epsilon$ attorno a 0 e uno attorno a $-2+\sqrt{3}$, che denotiamo rispettivamente con $\gamma_{0,\epsilon}$ e $\gamma_{-2+\sqrt{3},\epsilon}$, entrambi orientati positivamente

$$\oint_{\gamma_{0,1}} \frac{z^2+1}{z(z^2+4z+1)}\,dz = \left(\oint_{\gamma_{0,\epsilon}} + \oint_{\gamma_{-2+\sqrt{3},\epsilon}}\right) \frac{z^2+1}{z(z^2+4z+1)}\,dz \ .$$

Possiamo poi calcolare entrambi questi integrali usando la formula integrale di Cauchy. Il primo dà

$$\oint_{\gamma_{0,\epsilon}} \frac{1}{z}\left[\frac{z^2+1}{(z^2+4z+1)}\right] dz = 2\pi i \left[\frac{z^2+1}{(z^2+4z+1)}\right]\Bigg|_{z=0} = 2\pi i \ .$$

Per il secondo integrale, scomponiamo il polinomio al denominatore $z^2+4z+1 = (z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})$ e raccogliamo il fattore $(z+2-\sqrt{3})^{-1}$ per rendere più evidente come applicare la formula integrale di Cauchy, ottenendo

$$\begin{aligned}
&\oint_{\gamma_{-2+\sqrt{3},\epsilon}} \frac{1}{z+2-\sqrt{3}}\left[\frac{z^2+1}{z(z+2+\sqrt{3})}\right] dz = 2\pi i \left[\frac{z^2+1}{z(z+2+\sqrt{3})}\right]\Bigg|_{z=-2+\sqrt{3}} \\
&= 2\pi i \frac{8-4\sqrt{3}}{(-2+\sqrt{3})2\sqrt{3}} = 2\pi i \frac{-4(-2+\sqrt{3})}{(-2+\sqrt{3})2\sqrt{3}} = -2\pi i \frac{2}{\sqrt{3}} \ .
\end{aligned}$$

Sommando i due contributi troviamo quindi

$$\oint_{\gamma_{0,1}} \frac{z^2+1}{z(z^2+4z+1)}\,dz = 2\pi i \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \ ,$$

da cui infine otteniamo l'integrale iniziale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{2+\cos\theta} d\theta = -i\left(2\pi i \left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right) = 2\pi\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \ .$$

Notiamo che abbiamo ottenuto un risultato reale, come doveva essere.