27 ottobre

<u>Lemma</u> La funzione $|x|$ è continua in $\mathbb{R}$ (scriveremo $|x| \in C^0(\mathbb{R})$)

(in generale, se $X \subseteq \mathbb{R}$, $C^0(X)$ è l'insieme delle funzioni $X \to \mathbb{R}$ continue in X)

<u>Dim</u> La dimostrazione è basata su

(1) $\quad \big| |x| - |x_0| \big| \leq |x - x_0| \quad \forall x, x_0 \in \mathbb{R}.$

Questa ultima è equivalente

$$-|x-x_0| \leq |x| - |x_0| \leq |x - x_0| \qquad (2)$$

$$-|x-x_0| \leq |x|-|x_0| \leq |x-x_0| \qquad (2)$$

$$|x|-|x_0| \leq |x-x_0| \iff |x| \leq |x-x_0|+|x_0|$$

Quest'ultima disug. e' vera perchè

$$|x| = |(x-x_0)+x_0| \leq |x-x_0|+|x_0| \quad \checkmark$$

$\forall\ x, x_0 \in \mathbb{R}$.

$$-|x-x_0| \leq |x|-|x_0| \iff |x-x_0| \geq |x_0|-|x|$$

$$\iff |x_0| \leq |x-x_0|+|x| = |x_0-x|+|x|$$

$$\iff |x_0| \leq |x_0-x|+|x|$$

Quest'ultima e' vera

$$|x_0| = |(x_0-x)+x| \leq |x_0-x|+|x|$$

$$= |x-x_0|+|x|$$

$\forall\ x, x_0 \in \mathbb{R}$.

In conclusione abbiamo dimostrato

$$\big|\,|x|-|x_0|\,\big| \le |x-x_0| \qquad (1)$$

Scegliamo un $x_0 \in \mathbb{R}$ qualsiasi. Vogliamo dimostrare che $|x|$ è continua in x_0.

Dobbiamo dimostrare che

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall \varepsilon>0 \ \ \exists \delta_\varepsilon>0 \ \text{ t.c.} \\ \qquad |x-x_0|<\delta_\varepsilon \Rightarrow \big|\,|x|-|x_0|\,\big|<\varepsilon . \end{array}} \quad *$$

La (1) ci dice che se scelgo $\delta_\varepsilon = \varepsilon$ allora ho

$$\varepsilon > |x-x_0| \ge \big|\,|x|-|x_0|\,\big| \quad \text{e}$$

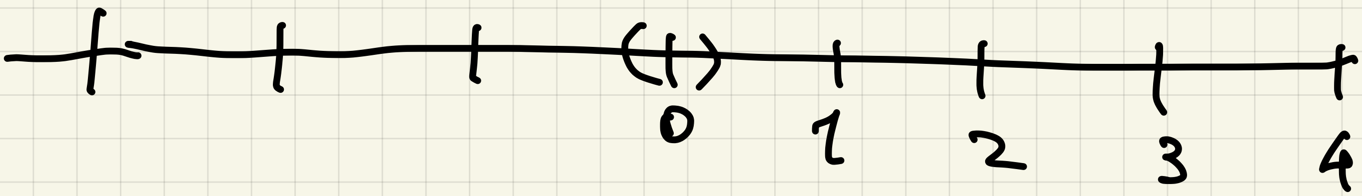
quindi $*$ è soddisfatta.

Conclusione: $|x|$ è continua in x_0 $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}$.

Def Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X$. Se $x_0 \notin X'$ allora x_0 è detto un punto isolato di X.

Es $\mathbb{N}' = \emptyset$

$\mathbb{Z}' = \emptyset$

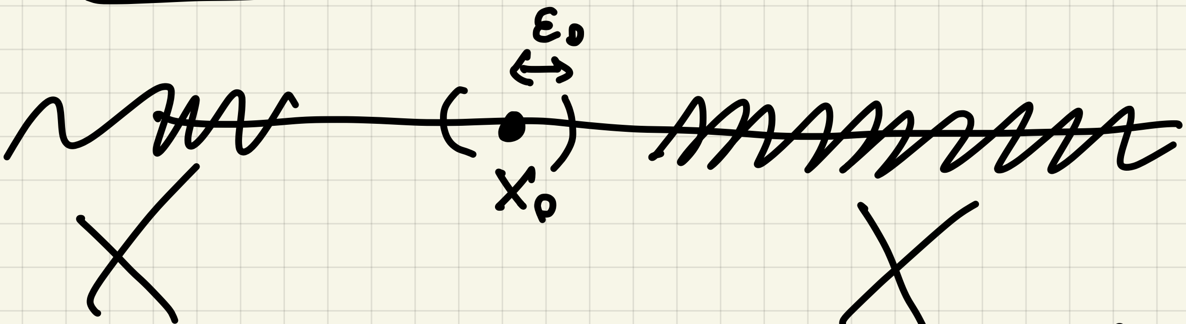


Esercizi

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X$, x_0 isolato. Allora è vero che

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \text{t.c.} \quad |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.}$$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \text{t.c.} \quad \underset{x \in X}{|x - x_0| < \delta_\varepsilon} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.}$$



Siccome x_0 è isolato, allora esiste $\varepsilon_0 > 0$ t.c. $x \in X$ $x \neq x_0$

$\Rightarrow |x - x_0| \geq \varepsilon_0$.

Applico la definizione con

$$\delta_\varepsilon = \varepsilon_0 .$$

$$\underset{x \in X}{|x - x_0| < \delta_\varepsilon = \varepsilon_0} \overset{\text{devo dim}}{\Longrightarrow} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

L'implicazione è vera perchè

$$|x - x_0| < \varepsilon_0 \text{ e } x \in X \Rightarrow x = x_0$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

Esercizio Sia $x_0 \in X \cap X'$. Allora sono equiv.
$f : X \to \mathbb{R}$

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $|x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

La 1) significa

1') $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Si vede subito che 2) $\Rightarrow$ 1')
D'altra parte è facile verificare
che 1') $\Rightarrow$ 2)

Nelle note definisco

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

<u>Teor</u> Siano $f, g : X \setminus \{x_0\}$, $x_0 \in X'$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$

1) $\lim_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = a + b$ eccetto nei casi indefiniti $(a, b) = (+\infty, -\infty)$
$(-\infty, +\infty)$

2) $\lim_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = a\, b$ eccetto casi indefiniti $(a, b) = (0, \pm\infty)$
$(\pm\infty, 0)$

3) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ salvo $b = 0$ e casi indefiniti $(a, b) = (\pm\infty, \pm\infty)$

Teor (Carabinieri)

Siano $f, g, h : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X'$

allora se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$

e se $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X$

allora $\lim_{x \to x_0} h(x) = L$. $\square$

Teor $\sin x, \cos x \in C^0(\mathbb{R})$.

Dim

1) Dimostriamo che $\sin x$ è continua nel punto 0.

Questa è una conseguenza della disuguaglianza

$$|\sin x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(1) $|\sin x| \leq |x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

Incominciamo col caso $x > 0$.

Osserviamo che per $x \geq \frac{\pi}{2}$ la

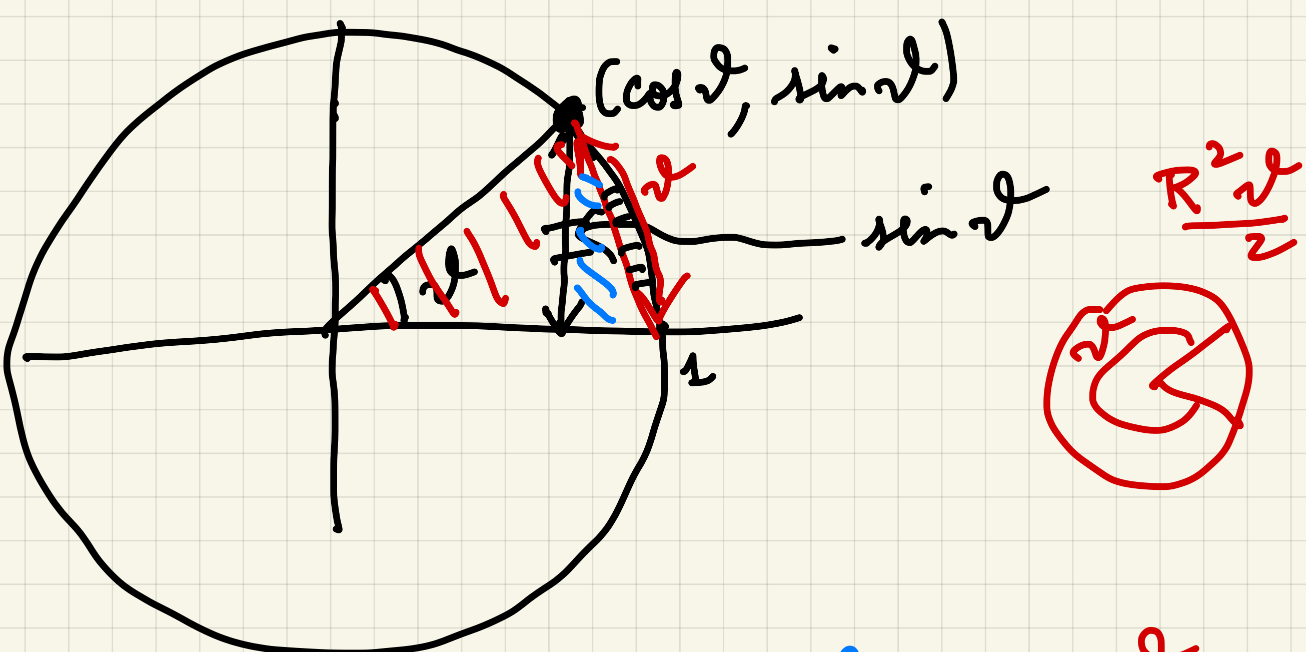
(1) è vera perché

$$|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq x \Rightarrow |\sin x| \leq |x|$$

Considero $0 < x < \frac{\pi}{2}$

La riscriviamo come

$$0 < \sin \vartheta < \vartheta \quad \text{per } 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$$



Area Triangolo $= \frac{\cancel{1}\, \sin \vartheta}{\cancel{2}} < \frac{\vartheta}{\cancel{2}}$

Conclusione. Abbiamo dimostrato che

$$|\sin x| \leq |x| \qquad \forall x \geq 0.$$

$$\Longrightarrow |\sin x| \leq |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Perché $|\sin x|$ e $|x|$ sono funzioni pari.

Inoltre nota se $x_0 < 0$, $x_0 = -|x_0|$

$$|\sin(x_0)| = |\sin(|x_0|)| \leq |x_0|$$

$$|\sin x_0| \leq |x_0| \quad \forall x_0 < 0.$$

$$|\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$f(x) = f(-x) \ \forall x.$

Abbiamo dimostrato

$$0 \leq |\sin x| \leq |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to 0} |x| = |0| = 0$$

$$\underset{\text{conf}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to 0} |\sin x| = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

<u>Esercizio</u>

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$$

2) $\lim_{x\to 0} \cos x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} (1-\cos x) = 0$

valutiamo quanto segue con $|x| < \frac{\pi}{2}$

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$$

$$1-\cos x = 1-\sqrt{1-\sin^2 x} =$$

$$= \left(1-\sqrt{1-\sin^2 x}\right) \frac{1+\sqrt{1-\sin^2 x}}{1+\sqrt{1-\sin^2 x}}$$

$$= \frac{1-\left(\sqrt{1-\sin^2 x}\right)^2}{1+\cos x}$$

$$= \frac{\cancel{1} - (\cancel{1} - \sin^2 x)}{1+\cos x} = \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$$

$|x| < \frac{\pi}{2}$

$$0 \le 1-\cos x = \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} \le \sin^2 x$$

$$\underset{\downarrow \atop 0}{0} \le \underbrace{1-\cos x}_{\downarrow x\to 0 \atop 0} \le \underset{\downarrow x\to 0 \atop 0}{\sin^2 x} \quad \forall\ |x| < \frac{\pi}{2}.$$

3) $\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \sin(x_0 + h) \qquad x = x_0 + h$$

$$= \sin(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\sin(h)$$

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \lim_{h \to 0}\left(\sin(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\sin(h)\right)$$

$$= \sin(x_0) + \cancel{\cos(x_0)\cdot 0}$$

4) $\lim_{x \to x_0} \cos(x) = \cos(x_0)$

Limiti notevoli.

Lemma $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Dim Basta occuparsi di $|x|<\frac{\pi}{2}$

Dimostreremo che per $\boxed{0<x<\frac{\pi}{2}}$

$$\boxed{\sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$\Rightarrow \quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \qquad \forall\, 0<x<\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \qquad 0<|x|<\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & < & \frac{x}{\sin x} & < & \frac{1}{\cos x} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x\to 0} & & \downarrow{\scriptstyle x\to 0} \\ 1 & & 1 & & 1 \end{array}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \iff \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$