$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{4^n - 2^n} t^n$$

1) Insieme di convergenza

2) Convergenza uniforme? NO

Se ci fosse converg. uniforme, dovrebbe essere $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{4^n-2^n} t^n = 0$

uniformemente su $]-4,4[$,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon \quad \left| \frac{n+1}{4^n - 2^n} t^n \right| < \varepsilon \quad \forall t \in]-4,4[$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 4} \left| \frac{n+1}{4^n - 2^n} t^n \right| \leq \varepsilon \;\Rightarrow\; (n+1) \frac{4^n}{4^n - 2^n} \leq \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon$$

impossibile

Differenziabilità $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x-x_0)}{\|x-x_0\|} = 0$

cioè la funzione $f(x) - [f(x_0) + df(x_0)(x-x_0)] = o(\|x-x_0\|)$

quindi $f(x) = \overbrace{f(x_0) + df(x_0)(x-x_0)}^{\text{appross lineare}} + \underbrace{o(\|x-x_0\|)}_{\text{errore}}$

questa è la formula di Taylor del primo ordine

$$\left[f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(|x-x_0|) \right]$$

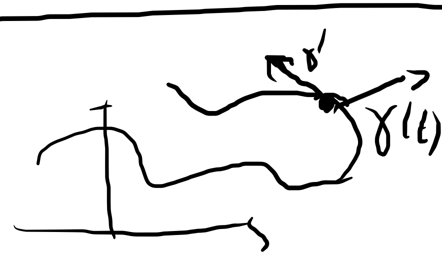
Caso particolare di funzione composta

$\overset{\text{curva}}{\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^M}$ $\qquad g : \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}$

$(g \circ \gamma) : I \to \mathbb{R}$ $\qquad d(g \circ \gamma)(t_0) = dg(\gamma(t_0)) \circ d\gamma(t_0)$

$$\Rightarrow \boxed{(g \circ \gamma)'(t) = dg(\gamma(t_0))\, \gamma'(t_0) = \langle \nabla g(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) \rangle}$$

$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$



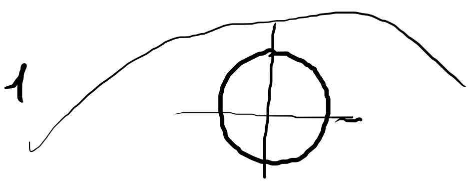
$\gamma'(t)$ è il vettore tangente

Supponiamo di avere una curva nel piano rappresentata come curva di livello di un campo scalare

$\boxed{f(x,y)=\alpha}$, $\qquad \alpha\in\mathbb{R} \qquad L_\alpha = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : f(x,y)=\alpha\}$

Sia $(x_0,y_0)^T \in L_\alpha$; supponiamo che in un intorno del punto $(x_0,y_0)^T$ la curva si possa parametrizzare $\underline{L_\alpha \cap U = \{\gamma(t) : t\in I\}}$

Es: $x^2+y^2=1$



$\gamma(t)=(\cos t, \operatorname{sen} t)^T \quad t\in[0,2\pi]$

Considero la funzione composta $f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}$

$\forall t \in I \quad \gamma(t) \in L_\alpha \qquad \forall (x,y) \in L_\alpha \quad f(x,y) = \alpha.$

la funzione $f \circ \gamma$ è costante $\qquad f(x,y) = x^2 + y^2$

$(f \circ \gamma)(t) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \quad \forall t$

$$0 = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \quad \forall t \in I$$

Il gradiente è ortogonale alla sua curva di livello

Proprietà geometriche del vettore gradiente: $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diff.bile

1) Il vettore gradiente è ortogonale ai suoi insiemi di livello.

2) Il vettore gradiente indica la direzione di massima rapidità di variazione e la sua norma è quella massima

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v}(x) \right| = \left| \langle \nabla f(x), \underset{\uparrow}{v} \rangle \right| = \left| \left\langle \nabla f(x), \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|} \right\rangle \right| =$$

$$v = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$$

$$= \frac{1}{\|\nabla f(x)\|} \left| \langle \nabla f(x), \nabla f(x) \rangle \right| = \frac{\|\nabla f(x)\|^2}{\|\nabla f(x)\|} =$$

Es: equazione differenziale $u' = u$ u variabile funzionale

trovare una funzione $u(x)$ tale che $u'(x) = u(x)$ $\forall x$

ad esempio $u(x) = 37 e^x$

$u(x,y)$

$$\boxed{x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0}$$

trovare una funzione $u(x,y)$ tale che $\forall (x,y)^T$

$$x \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + y \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0$$

es: $u = 0$ è soluzione

Sia $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una qualunque funzione derivabile; allora la

funzione $u(x,y) = \varphi\left(y/x\right)$ $\qquad u: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y)^T : y \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$

è soluzione dell' eq. diff. $\quad x \dfrac{\partial u}{\partial x} + y \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi \circ h\right)(x,y) = \varphi'(h(x,y)) \cdot \frac{\partial}{\partial x} h(x,y) = \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$h(x,y) = \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \qquad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x}$$

$$x \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + y \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\left[-\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\right] = 0 \quad \forall (x,y)^T$$

$$* = \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right](y-y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\sigma,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right](x-x_0)$$

$$\left|\frac{1}{\|(x-x_0,\ y-y_0)^T\|}\cdot *\right| \leq \underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right|}_{|\xi - y_0| < |y-y_0|} \cdot \overbrace{\frac{|y-y_0|}{\|(x-x_0,y-y_0)^T\|}}^{\leq 1} + \underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial x}(\sigma,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|}_{|\sigma - x_0| < |x-x_0|} \cdot \overbrace{\frac{|x-x_0|}{\|(x-x_0,y-y_0)^T\|}}^{\leq 1}$$

$\lim\limits_{(x,y)^T \to (x_0,y_0)^T}$

$\Rightarrow$ $x \to x_0$

$y \to y_0$

$\Rightarrow$ $\xi \to y_0$

$\sigma \to x_0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$$

0

0

⚠ La condizione è sufficiente, non necessaria

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{x} = 0 \qquad f'(x) = \overset{\to 0}{2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)} - \overbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}^{\nexists}$$

$$\nexists \lim_{x \to 0} f'(x)$$

Osservazione: se f ha le derivate parziali continue, allora f è differenziabile, ma allora esistono tutte le derivate direz.

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle \qquad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T$$

è continua

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v} \text{ è continua.}$$

Tutte le derivate direzionali sono continue.

Formula del valor medio

$f(b) - f(a) = \underline{f'(\xi)\cdot(b-a)}$ $\qquad |\xi - a| < |b-a|$ $\qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$? $\qquad f(b) - f(a) \overset{?}{=} \langle \nabla f(\xi), b-a \rangle$

$\uparrow$

$b-a$ è un vettore

∇f è un vettore

Teorema

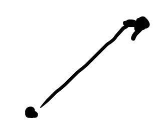
CONVESSO

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto convesso. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in A.

Allora, per ogni $x^1, x^2 \in A$ esiste un punto ξ appartenente al segmento di estremi x^1 e x^2 tale che $f(x_2) - f(x_1) = \langle \nabla f(\xi), x_2 - x_1 \rangle$.

Segmento di estremi x^1 e x^2 in $\mathbb{R}^N$

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^N \qquad \gamma(t) = x^1 + t(x^2 - x^1)$$



Dim Considero $\gamma(t) = x^1 + t(x^2 - x^1)$ $\quad \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$

$\gamma(t) \in A \quad \forall t$

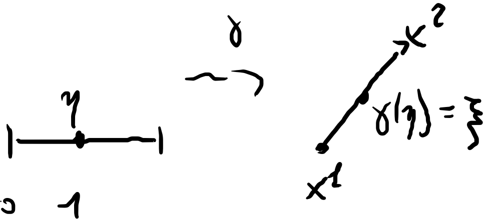
considero $(f \circ \gamma)(t) : [0,1] \to \mathbb{R}$

$\gamma'(t) = x^2 - x^1$

Per il Teorema di Lagrange esiste

$\eta \in]0,1[$ tale che $(f \circ \gamma)'(\eta) = (f\circ\gamma)(1) - (f\circ\gamma)(0) = f(x^2) - f(x^1)$

$$(f \circ \gamma)'(\eta) = \langle \nabla f(\gamma(\eta)), \gamma'(\eta) \rangle = \langle \nabla f(\underbrace{\gamma(\eta)}_{=\xi}), x^2 - x^1 \rangle$$



Teorema (funzioni con derivate nulle)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso (per archi), sia $f: A \to \mathbb{R}$ tale che esista $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ $\forall i=1,..,n$ $\forall x \in A$ e sia $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$ $\forall i$ $\forall x$.

Allora f è costante.

<u>Dim</u> [Lemma: se A è aperto connesso per archi, allora per ogni $x^1, x^2 \in A$ esiste γ curva C^1 che congiunge x^1 e x^2]

Idea: considero $x^1, x^2 \in A$. Per il lemma esiste $\gamma \in C^1(I, A)$

$I = [0,1]$

tale che $\gamma(0) = x^1 \quad \gamma(1) = x^2$.

Proviamo che $\boxed{f(x^1) = f(x^2)}$.

Considero la funzione composta $f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0 \quad \forall t \quad \text{quindi } (f \circ \gamma)(1) = (f \circ \gamma)(0)$$

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$\overset{\shortparallel}{0}$ [NB f è differenziabile per il Teorema del differenziale totale]