$W \subset V$ $\qquad$ V sp. vett. su $\mathbb{K}$

W sotto-sp. vett. di V

$$W \rightsquigarrow \sim_W \qquad v \sim_W u \overset{\text{def}}{\iff} v - u \in W$$

$$[v] = \{ v + w \mid w \in W \} = v + W$$

(notazione)

$$V/W := V/\sim_W$$

$$\begin{cases} [v] + [u] \overset{\text{def}}{=} [v+u] & \forall\, [v], [u] \in V/W \\ \lambda \cdot [v] \overset{\text{def}}{=} [\lambda v] & \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, [v] \in V/W \end{cases}$$

$+$ e $\cdot$ sono ben definite

$[v]+[u] = [v+u] =$

commutat.

$= [u+v] =$

$[u]+[v]$

$(+)$ $\quad v' \in [v] \quad u' \in [u]$

$$\underbrace{v'+u'}_{} \overset{?}{\sim}_W \underbrace{v+u}_{}$$

$$(v'+u') - (v+u) = \underbrace{(v'-v)}_{\in W} + \underbrace{(u'-u)}_{\in W} \in W$$

$[v]+[u] = [v+u]$

$\qquad\qquad\qquad\quad \parallel$

$[v']+[u'] = [v'+u']$ se $[v] = [v']$ e $[u] = [u']$

$+$ è ben definita

$(\cdot)$ è ben definita $\circledast$

$$(\lambda + \mu)\cdot[v] = [(\lambda+\mu)\cdot v] = [\lambda v + \mu v] = [\lambda v] + [\mu v] =$$

$$= \lambda [v] + \mu [v]$$

Verificare che V/W sp. vett. $\cancel{\times}$

<u>Def.</u> V/W è detto spazio vettoriale quoziente di V rispetto a W.

$$\pi : V \longrightarrow V/W$$

$$v \longmapsto [v] = \underline{v + W}$$

$$(v+W) + (u+W) = v+u+W$$

$$\lambda(v+W) = \lambda v + W$$

$$\begin{cases} \pi(v+u) = [v+u] = [v]+[u] = \pi(v)+\pi(u) \\ \pi(\lambda v) = [\lambda v] = \lambda[v] = \lambda\,\pi(v) \end{cases}$$

Def Siano V, W due $\mathbb{K}$-spaz. vett. e sia $f: V \to W$ una applicazione. Diciamo che f è **lineare** se

1) $f(\underbrace{v+u}_{V}) = f(v) \underbrace{+}_{W} f(u) \quad \forall\, v, u \in V$

2) $f(\underbrace{\lambda \cdot v}_{V}) = \underbrace{\lambda \cdot f(v)}_{W} \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, v \in V.$

Es: $\pi: V \to V/W$, $W \subset V$ sottosp. vett.
lineare

Se $W = O = \{0\}$ applicazione nulla

$f: V \longrightarrow O$ è lineare

$v \longmapsto 0$

$f: V \longrightarrow W$ (V, W sp. vett. qualunque)

$f(v) = 0_W$ applicazione nulla è lineare

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ è $\mathbb{R}$- sp. vett.)

$f(x) = x^2$ non è lineare

infatti: $f(2) = f(2 \cdot 1) \neq 2 f(1) = 2$

$$\begin{array}{c} f(2) \\ \parallel \\ 4 \end{array}$$

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$g(x) = x + 1$ non è lineare

$g(2) = 3$

$3 = g(2 \cdot 1) \neq 2\, g(1) = 4$

Prop. Se $f : V \longrightarrow W$ lineare $\Longrightarrow f(0_V) = 0_W$

Dim $f(0_V) = f(0_V + 0_V) \underset{\text{lin.}}{=} f(0_V) + f(0_V)$

$0_W = f(0_V)$

Prop. $f: V \longrightarrow W$ è lineare $\Longleftrightarrow$

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \forall u, v \in V.$$

Dim

$(\Longrightarrow)$ $f: V \longrightarrow W$ lineare

$$f(\lambda u + \mu v) = f(\lambda u) + f(\mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

$(\Longleftarrow)$

$$f(u+v) = f(1 \cdot u + 1 \cdot v) = 1\, f(u) + 1\, f(v) = f(u) + f(v)$$

$$f(\lambda u) = f(\lambda u + 0 \cdot 0_V) = \lambda f(u) + 0 \cdot f(0_V) = \lambda f(u).$$

Se $f: V \to W$ lineare:

$$f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)$$

Nucleo e immagine

$f: V \longrightarrow W$ applicazione lineare

$\operatorname{Im} f \overset{def}{=} \{ f(v) \mid v \in V \} \subset W$ immagine di f

$\operatorname{Ker} f \overset{def}{=} f^{-1}(0_W) = \{ v \in V \mid f(v) = 0_W \} \subset V$

nucleo di f — preimmagine

Ker da kernel (= nucleo)

$0_W = f(0_V) \in \operatorname{Im} f \neq \emptyset$, $\underline{0_V} \in \operatorname{Ker} f \neq \emptyset$

Prop. Se $f : V \longrightarrow W$ lineare allora

$\ker f$ sottosp. vett. di V e $\operatorname{Im} f$ sottosp. vett. di W.

Dim Abbiamo già fatto vedere che $\ker f$ e $\operatorname{Im} f \neq \emptyset$

1) $v, u \in \ker f \Rightarrow f(v+u) \underset{\text{lin.}}{=} f(v) + f(u) = 0_W + 0_W = 0_W$

$\Rightarrow v + u \in \ker f$.

$\lambda \in \mathbb{K}$, $\underline{v \in \ker f} \Rightarrow f(\lambda v) \underset{\underline{\text{lin}}}{=} \lambda \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{f(v)} = \lambda 0_W = 0_W$

$\Rightarrow \lambda v \in \ker f$.

2) $w_1, w_2 \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists\, v_1, v_2 \in V$ t.c. $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$

$\underline{f(v_1 + v_2)} \underset{\underline{\text{lin}}}{=} f(v_1) + f(v_2) = \underline{w_1 + w_2} \Rightarrow w_1 + w_2 \in \operatorname{Im} f$.

$\lambda \in \mathbb{K}$, $w \in \operatorname{Im} f \rightsquigarrow \exists\, v \in V$ t.c. $f(v) = w$

$$f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda w \Longrightarrow \lambda w \in \operatorname{Im} f$$

$f : V \longrightarrow W$ suriettiva $\Longleftrightarrow \operatorname{Im} f = W$

Prop. $f : V \longrightarrow W$ lineare. Allora f è iniettiva $\Longleftrightarrow \ker f = \{0_V\}$.

nullo o banale

Dim ($\Rightarrow$) f iniettiva $f(v) = 0_W = f(0_V) \Rightarrow v = 0_V$
$\Rightarrow \ker f = 0$

($\Leftarrow$) $f(u) = f(v) \Rightarrow f(u) - f(v) = 0_W \overset{\text{lin.}}{\Rightarrow} f(u-v) = 0_W \Rightarrow$
$u - v \in \ker f \Rightarrow u - v = 0_V$
$\Rightarrow u = v$.

$(\Leftarrow)$ $\quad f(u) = f(v) \Rightarrow f(u) - f(v) = 0_W \overset{\text{lin.}}{\Rightarrow}$

$f(u-v) = 0_W \Rightarrow u - v \in \ker f = \{0_V\}$

$\Rightarrow u - v = 0_V \Rightarrow u = v.$

Def $\quad \dim(\operatorname{Im} f) =: \operatorname{rk} f$ è detto rango di f

$\uparrow$

rango (rank)

$\dim(\ker f) =: \operatorname{null} f$ è detta nullità di f.

Se V, W $\mathbb{K}$ - sp. vett.

$$\boxed{\mathrm{Hom}(V, W)} \overset{\text{def}}{=} \{ f : V \longrightarrow W \mid f \text{ lineare} \}$$

$\neq \emptyset$ $\quad f : V \longrightarrow W$ è lineare

$v \longmapsto 0_W \quad \forall v \in V$

$$V^* \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K}) = \{ f : V \to \mathbb{K} \mid f \text{ lineare} \}$$

↑ spazio duale di V

$$V^{**} \overset{\text{def}}{=} (V^*)^* = \{ f : V^* \to \mathbb{K} \mid f \text{ lineare} \}$$

↑ spazio biduale

$\mathrm{Hom}(V, W)$ è uno spazio vett.

$f, g : V \longrightarrow W$ lineari $\rightsquigarrow$ $f+g : V \longrightarrow W$

$$(f+g)(v) \stackrel{def}{=} f(v) + g(v)$$

somma che definiamo

somma di W

$\lambda \in \mathbb{K}$, $f : V \longrightarrow W$ lineare $\rightsquigarrow$ $\lambda f : V \longrightarrow W$

$$(\lambda \cdot f)(v) \stackrel{def}{=} \lambda \cdot f(v)$$

quello che definiamo.

di W

$V^* = \underline{\mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})}$ spazio vett. spazio duale di V

I vettori di V^* sono funzioni lineari

$$\varphi : V \longrightarrow \mathbb{K}$$

si chiamano anche $\boxed{\text{forme lineari}}$, <u>covettori</u>

$V^{**} = (V^*)^*$ spazio vett. biduale di V.