

Il fatto che $Q_{BRST}^2 = 0$ permette di rendere manifesta l'invarianza di \mathcal{L} rispetto a BRST:

- $\delta \mathcal{L}_{g.i.} = 0$

- $$\frac{\xi}{2} (B^a)^2 - B^a \partial^\mu A_\mu^a + \bar{c}^a (-\partial^\mu D_\mu^a) c^a =$$

$$= Q_{BRST} \cdot \left[\underbrace{\bar{c}^a \partial^\mu A_\mu^a - \frac{\xi}{2} \bar{c}^a B^a}_{\equiv \Psi} \right]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}_{g.i.} + Q_{BRST} \cdot \Psi$$

Siccome $Q_{BRST}^2 = 0 \Rightarrow Q_{BRST} \cdot \mathcal{L} = 0$

Definiamo la CARICA (conservata) di BRST.

Rimaniamo sulle gauge $G(A) = \partial_\mu A^{\mu a}$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^2 + \underbrace{\mathcal{L}_m}_{\substack{\uparrow \\ \text{ignoriamo il termine} \\ \text{di materia in il momento}}}$$

$$+ \frac{\xi}{2} (B^a)^2 - B^a \partial_\mu A^{\mu a} + \partial_\mu \bar{c}^a (D_\mu c)^a$$

Calcoleremo i momenti coniugati

$$A_i^a \rightarrow F_{i0}^a$$

$$A_0^a \rightarrow B^a$$

$$c^a \rightarrow \partial_0 \bar{c}^a$$

$$\bar{c}^a \rightarrow D_0 c^a$$

Teorema di Noether:

$$Q = \sum_x P_\alpha \dot{q}^\alpha$$

\uparrow
trasf. di simm.

$$\Rightarrow J_\mu^B = -F_{\mu\nu}^a (D^\mu c)^a - B^a (D_\mu c)^a + \frac{1}{2} \int^{abc} \partial_\mu \bar{c}^a c^b c^c$$

$$Q_{BRST} = \int d^3x \left[F_{0i}^a (D_i c)^a - B^a (D_0 c)^a + \frac{1}{2} \int^{abc} \partial_0 \bar{c}^a c^b c^c \right] \quad (*)$$

Q_{BRST} ha ghost number = +1

$$gh\# (Q_B \cdot \varphi) = gh\# (\varphi) + 1$$

\rightsquigarrow Quantizz. canonica: otteniamo le regole di comm. trovate quando descriv. quant. can. in $A_0=0$, e in $\mu=0$

$$[A_0^a(\bar{x}, t), B^b(\bar{y}, t)] = i\delta^{ab} \delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{y})$$

$$\{c^a(\bar{x}, t), \partial_0 \bar{c}^b(\bar{y}, t)\} = i\delta^{ab} \delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{y})$$

$$\{\bar{c}^a(\bar{x}, t), (D_0 c)^b(\bar{y}, t)\} = i\delta^{ab} \delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{y})$$

Usando le regole di comm. canoniche, si vede che Q_{BRST} in (*) genera le trasf. di BRST, cioè

$$\delta_{BRST} \varphi = i [Q_{BRST}, \varphi]_{\pm}$$

- Esprimiamo i campi sugli sp. di creat. e di destr.
- Gli stati sono det. da $a_\mu^+ |0\rangle$; in particolare $a_c^+ |0\rangle$ crea una particella di ghost.

- Lo spazio di Fock contiene sia stati FISICI che stati non-FISICI (es. ghost, comp. bagliativi di A, \dots)
- Per selezionare gli stati fisici richiediamo che gli elementi di matrice tra STATI FISICI non dipendano dalle cond. di gauge fixing $G(A)$, e purché che non dipendano dal funzionale Φ in $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{g.f.} + Q_B \Phi$.

- La variazione di un elemento di matrice $\langle \alpha | \beta \rangle$ dovuta alla variaz. $\tilde{\delta}\Phi$

$$\begin{aligned} \tilde{\delta} \langle \alpha | \beta \rangle &= i \langle \alpha | \tilde{\delta} S | \beta \rangle \\ &= i \langle \alpha | Q_B \tilde{\delta} \Phi | \beta \rangle \\ &= \langle \alpha | [Q_B, \tilde{\delta} \Phi] | \beta \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \beta \rangle &= \int \mathcal{D}\phi e^{iS} \\ \langle \alpha | \beta \rangle &= \int \mathcal{D}\phi e^{iS + i\tilde{\delta}S} \end{aligned}$$

α, β sono FISICI $\Rightarrow \langle \alpha | [Q_B, \tilde{\delta} \Phi] | \beta \rangle = 0 \quad \forall \tilde{\delta} \Phi$

\Rightarrow Gli STATI FISICI stanno nel NUCLEO dell'operatore di BRST, cioè $Q_B | \text{phys} \rangle = 0$

Inoltre due stati fisici che differiscono in un vett. della forma $Q_B | \chi \rangle$ danno gli stessi elem. di matrice con ogni stato fisico

$$\langle \alpha | (| \beta \rangle + Q_B | \chi \rangle) = \langle \alpha | \beta \rangle + \langle \alpha | Q_B | \chi \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle.$$

\Rightarrow $| \text{phys} \rangle$ e $| \text{phys} \rangle + Q_B | \chi \rangle$ sono equiv. $\forall | \chi \rangle$

$$\Rightarrow \mathcal{H}_{\text{phys}} = \frac{\text{Ker } Q_B}{\text{Im } Q_B} \longleftrightarrow \begin{array}{l} \text{COHOMOLOGY} \\ \text{of } Q_{\text{BRST}} \end{array}$$

• I vettori $|S\rangle$ d.c.
 $Q_B|S\rangle = 0$ sono detti
 CHIUSI

• I vettori $|X\rangle$ d.c.
 $|X\rangle = Q_B|Y\rangle$ sono
 detti ESATTI

Consideriamo una teoria ABELIANA (i ghost sono DISACCOPIATI, ma la procedura di BRST è ancora valida, specialmente nell'identificare gli stati fisici).

- Prendiamo $G(A) = \partial_\mu A^\mu$
- Integriamo su B : le trasf. di BRST diventano
 $\delta A_\mu = \partial_\mu c \quad \delta \bar{c} = -\partial_\mu A^\mu / \xi \quad \delta c = 0$
- Espandiamo i campi in op. dist. e cost.:

$$A^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \left(a^\mu(\vec{p}) e^{ipx} + a^{\mu\dagger}(\vec{p}) e^{-ipx} \right)$$

$$c(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \left(d(\vec{p}) e^{ipx} + d^\dagger(\vec{p}) e^{-ipx} \right)$$

$$\bar{c}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \left(b(\vec{p}) e^{ipx} + b^\dagger(\vec{p}) e^{-ipx} \right)$$

- $[Q_B, a^\mu(\bar{p})] = -p^\mu d(\bar{p}) \quad [Q_B, a^{\mu\dagger}(\bar{p})] = p^\mu d^\dagger(\bar{p})$
 $\{Q_B, b(\bar{p})\} = p^\mu a_\mu(\bar{p})/\xi \quad \{Q_B, b^\dagger(\bar{p})\} = p^\mu a_\mu^\dagger(\bar{p})/\xi$
 $\{Q_B, d(\bar{p})\} = 0 \quad \{Q_B, d^\dagger(\bar{p})\} = 0$

- Consideriamo gli stati $|\psi\rangle$ f.c. $Q_B|\psi\rangle = 0$

- gli stati $|e, \psi\rangle \equiv e_\mu a^{\mu\dagger} |\psi\rangle$ sono FISICI se $e_\mu p^\mu = 0$

- gli stati $|\psi'\rangle \equiv b^\dagger(\bar{p})|\psi\rangle$ soddisfano $Q_B|\psi'\rangle = \frac{p^\mu a_\mu^\dagger(\bar{p})}{\xi} |\psi\rangle$

$$\Rightarrow |e + \alpha p, \psi\rangle = |e_\mu, \psi\rangle + \xi \alpha Q_B |\psi'\rangle \cong |e, \psi\rangle$$

(solite condizioni di gauge-invarianza applicate ai vettori di polarizzazione.)

- Abbiamo anche $Q_B b^\dagger(\bar{p})|\psi\rangle = \frac{p^\mu a_\mu(\bar{p})}{\xi} |\psi\rangle \neq 0$

\rightarrow stati $b^\dagger|\psi\rangle$ non sono fisici

- $\forall e_\mu$ con $e_\mu p^\mu \neq 0 \quad d^\dagger(\bar{p})|\psi\rangle = \frac{Q_B e_\mu a^{\mu\dagger}(\bar{p})|\psi\rangle}{(e \cdot p)} \Rightarrow$

$\Rightarrow d^\dagger(\bar{p})$ è Q_B -esatto $\Rightarrow \cong 0$

$\Rightarrow \mathcal{H}_{\text{phys}}$ non contiene ghost!

- $[a_\mu(\bar{p}), a_\nu^\dagger(\bar{p}')] = -\eta_{\mu\nu} \delta^{(3)}(\bar{p} - \bar{p}') \Rightarrow \|\mathcal{Q}_0^+ |0\rangle\|^2 < 0$
 (\uparrow)
 $(\uparrow - \downarrow - \uparrow - \downarrow)$

Lo sp. di Fock NON è uno SPAZIO DI HILBERT

(a_0 è data e g_0^+ cond. in consistenza con Lorentz. inv.)

la vera domanda è " \mathcal{H}_{phys} è uno SP. DI HILBERT?"

la risp. è "SI".

↓
S-matrix
è unitaria

↓
Basta dimostrare in una scelta di G(A).

Si come esistono "GAUGE UNITARIE" in cui la risp. è manifesta, allora sarà vera anche in le altre scelte di gauge fixing.

→ Il metodo di FP genera una lagrangiana che è QUADRATICA nei campi c e \bar{c} .

Questo è OK in $G(A) = \partial_\mu A^\mu$
↓
controllare la rinormalizzabilità

Ci sono altre scelte di G che introducono termini CUBICI o QUARTICI (in \bar{c}, c) in L
in cancellare degli infiniti in $\textcircled{0}$ o $\textcircled{0}$.

Per fortuna BRST danno un metodo più semplice per trovare una class di lagrangiane equivalenti che danno la stessa metrica S (tra gli stati fisici):

Prendere L come il più generico funzionale dei campi $A_\mu, \underbrace{\phi}_{\text{matter}}, c, \bar{c}, B$. A.c. sia INVARIANTE sotto transf. BRST e sotto tutte le simmetrie globali della teoria (di partenza)

Si può dimostrare che una tale L è data da

$$L[\phi, c, \bar{c}, B] = L_0[\phi] + Q_B \cdot \underbrace{\Psi[\phi, c, \bar{c}, B]}_{\text{funzionale arbitrario di ghost } h^0 = -1}$$

funzionale arbitrario di ghost $h^0 = -1$



$Q_B \cdot \Psi$ non è necessariamente quadratico in c, \bar{c}

Stati fisici sono ancora dati da coomologia di Q_B .

⇒ siccome esiste una gauge (es. $A_0=0$) in cui il ghost è aciclico, allora i ghost non sono fisici in ogni gauge (scelta di Ψ)