$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \; 2 \cdot 1$$

Proprietà

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1}$$

Triangolo di Pascal o di Tartaglia

1 1 0

1 2 1 0

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

$\binom{4}{3}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

Es Sia A un insieme con n elementi

B " " " m elementi

$f: A \to B$ funzione

Per quali m esistono funzioni $f: A \to B$

INIETTIVE o SURIETTIVE.

↓

$m \geq n$

Se $m \geq n$, quante sono le funzioni iniettive

$f: A \to B$?

Data $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione di numeri reali

$\{S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è la successione di numeri reali "somme parziali" di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\boxed{S_{n+1} = S_n + a_{n+1}}$$

$$S_0 = a_0$$

Esempio di successione infinitesima

$\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ $n \geq 1$

$0 < \frac{1}{n} < \delta$ se $n > n_0$

$-\delta < 0 < \frac{1}{n} < \delta$

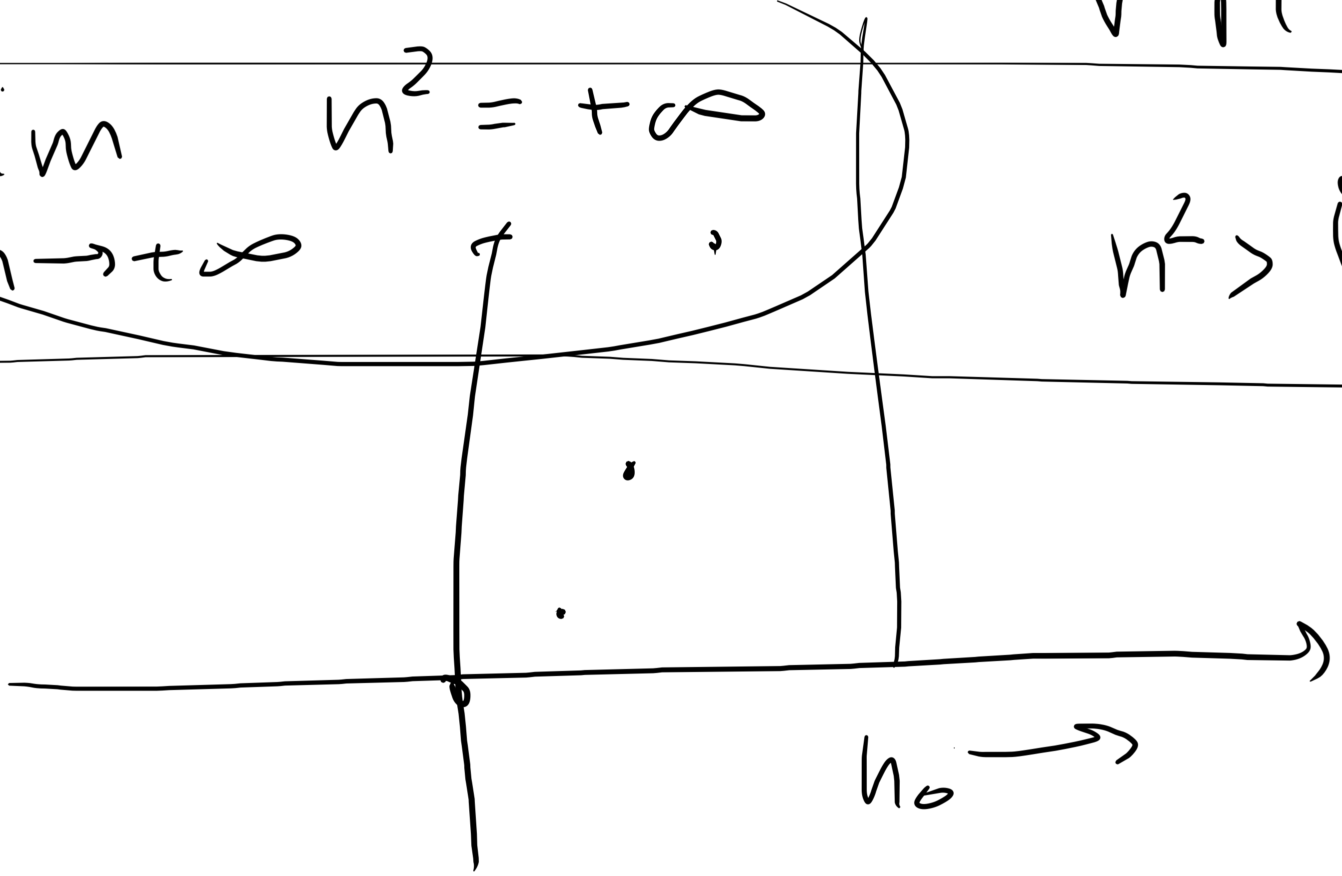
$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0}$$

$\{n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$$

$\forall M>0\ \exists n_0 :$

$n^2 > M \quad \forall n > n_0$



Prop Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente allora $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata

---

$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \quad l\in\mathbb{R} \iff \forall \delta>0 \ \exists n_0\in\mathbb{N}$

$a_n \in I_l(\delta) \iff$

$|a_n - l| < \delta \iff \quad l-\delta < a_n < l+\delta$

$n \geq n_0$

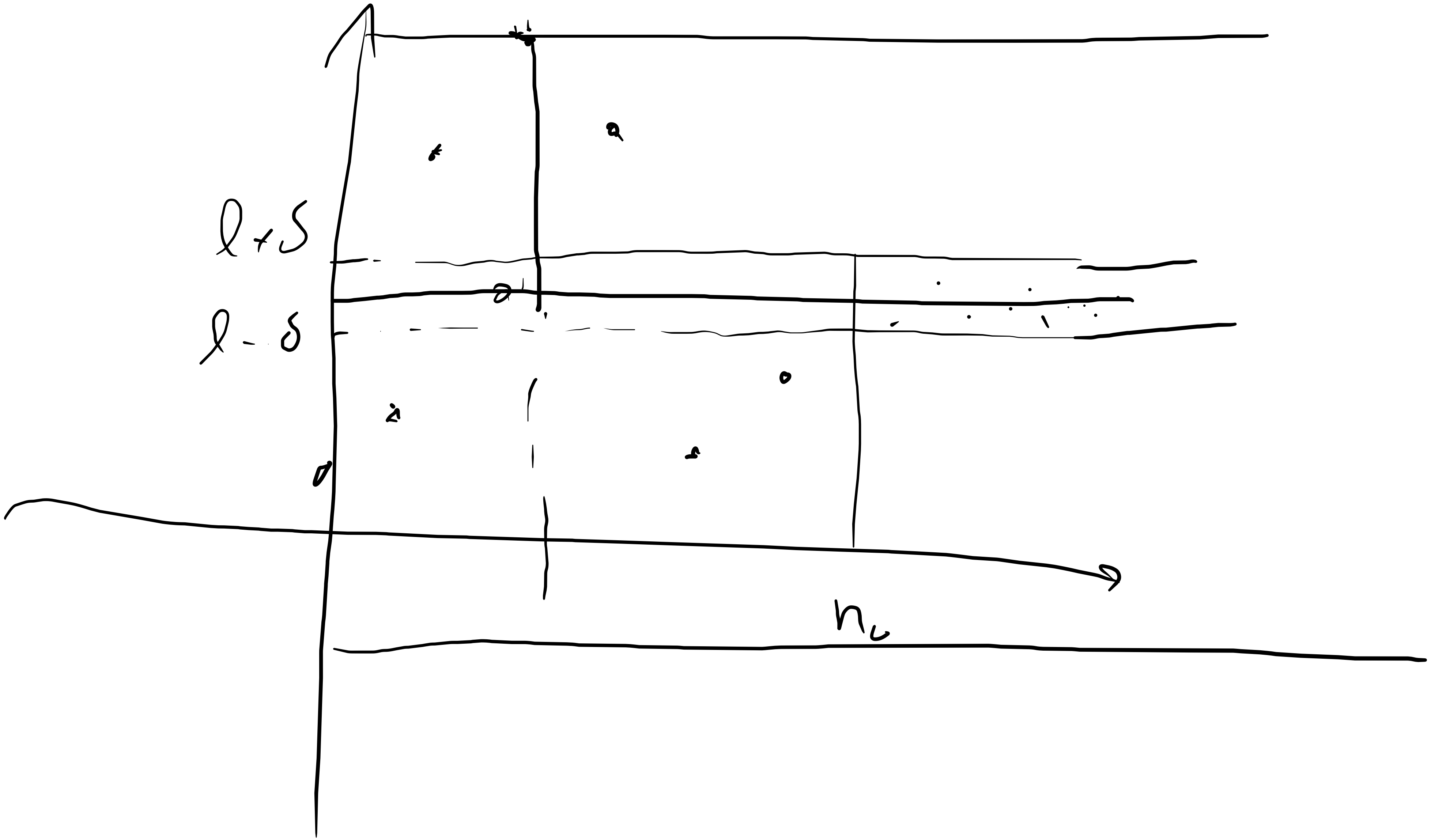
Pertanto $\forall n \geq n_0$ $\quad a_n \in I_l(\delta)$

cioè

$$l - \delta < a_n < l + \delta$$

Restano fuori dell'intorno $I_l(\delta)$

soltanto $a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}$, $\underbrace{\quad \dots \dots \quad}_{\cap \atop I_l(\delta)}$


l+δ
l-δ
n_v

Non vale il viceverso, in quanto

$\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata ma non convergente.

$$-2 < (-1)^n < 2$$

<u>Prop</u> Una successione monotona (anche in senso debole) ha limite.

In particolare una successione monotona illimitata è divergente mente una successione monotona limitata è convergente.

Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è, ad esempio, monotona crescente e illimitata, allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

Infatti preso comunque $M\in\mathbb{R}$, $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$

$a_{n_0} > M$. Se $n > n_0$ $a_n > a_{n_0} > M$ $\forall n$

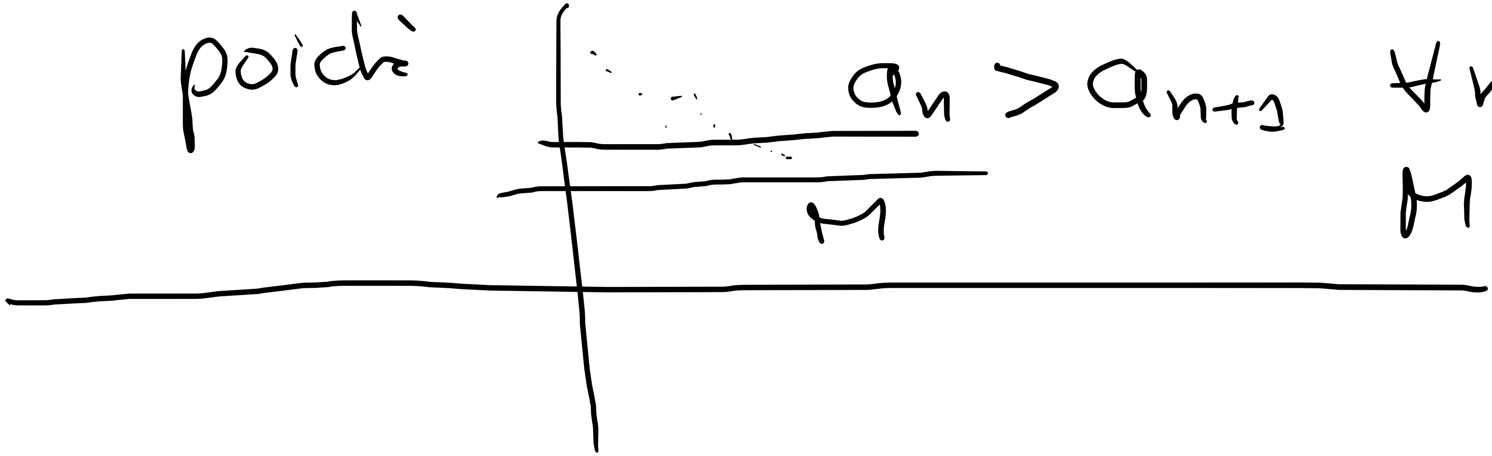
$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

Se $\{a_n\}$ è, ad esempio, monotona decrescente e limitata, allora $\exists M \in \mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad a_n > M$

Se M è il più grande fra tutte le limitazioni inferiori di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Allora poichè $a_n > a_{n+1}$ $\forall n$ $\exists n_0 :$



$M < a_n < M+\varepsilon$

$\forall n \geq n_0$

Oss Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è ILLIMITATA NON è detto che sia divergente

$$\{(-1)^n n^2\} = \{0, -1, +4, -9, -16, -25, \ldots$$

Oss Esistono successioni aventi limite ma non monotone.

Es $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\} = \left\{ -1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \right.$

$$-\varepsilon < -\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0}$$

Teorema del Confronto (Carabinieri)

Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tre successioni di numeri reali tali che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = l$$

e $\forall n$

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

Allora

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = l$$

$l \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = l$$

$$l - \delta < a_n < \delta + l \quad \forall n > n_0$$

$$l - \delta < b_n < l + \delta \quad \forall n > n_1$$

Se $\tilde{n} = m = \max(n_0, n_1)$ se $n > \tilde{n}$ $\left(\substack{> n_0 \\ > n_1}\right)$

allora

$$l - \delta < a_n < c_n < b_n < l + \delta \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} c_n = l$$

Applicazione

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n^2} = 0$$

Osservo $\quad 0 < \frac{2}{n^2} < \frac{1}{n} \quad$ e $n \geq 3$

$$0 < \frac{2}{n^2} < \frac{2}{n} \qquad n \geq 1$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

$$\begin{cases} a^n = a \cdot a^{n-1} \\ a_0 = 1 \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}$$

Se $a > 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a^n = +\infty$

Perchè utilizzo la disuguaglianza di Bernoulli

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad x \geq -1$$

Se $a > 1$

$$a = 1 + x \qquad x > 0 \qquad x = (a-1) > 0$$

$$+\infty > a^n = (1+x)^n \geq 1 + \underline{\underline{nx}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} (1 + nx) = +\infty$$

$\uparrow$ $\{1+nx\}_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona crescente e illim!!

$\Longrightarrow$ per il teorema del Confronto $\lim_{n \to +\infty} a^n = +\infty$

Se $a = 1$ $\qquad a^n = 1 \ \forall n$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a^n = 1}$$

Se $0 < a < 1$ $\qquad$ <u>calcolate</u> $\qquad \frac{1}{a} > 1$

$$\lim_{n \to +\infty} a^n = 0$$

Infine considerate i con $-1 < a \leq 0$ e $a < -1$

Prop (**Compatibilità** del limite di successioni rispetto alle operazioni)

Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni di numeri reali.

Supponiamo $\lim_{n\to+\infty} a_n = l_a$ $\lim_{n\to+\infty} b_n = l_b$

Allora la successione $\{c_n = a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite $l_a + l_b$ a meno che $l_a = +\infty$ e $l_b = -\infty$ oppure $l_a = -\infty$ e $l_b = +\infty$

convenendo che se $l_a = +\infty$ e $l_b = +\infty$
$(-\infty)$ $(-\infty)$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} c_n = +\infty \ (-\infty)$$

La successione $\{d_n = a_n \cdot b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ha limite $l_a \cdot l_b$ salvo il caso in cui

$l_a = 0 \quad l_b = \pm\infty$ e convenendo che se $l_a = \overset{(-\infty)}{+\infty}$ $l_b = \overset{(-\infty)}{+\infty}$

$l_a = \pm\infty \quad l_b = 0$ $\qquad l_a \cdot l_b = +\infty$ e $l_a = \overset{(-\infty)}{+\infty}$ $l_b = \overset{(+\infty)}{-\infty}$

$l_a \cdot l_b = -\infty$

Dim

$l_a + l_b$ è limite di $\{\underbrace{a_n + b_n}_{c_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$

(supponiamo $l_a, l_b \in \mathbb{R}$)

$$|a_n + b_n - l_a - l_b| = |a_n + b_n - (l_a + l_b)|$$

Triangolare

$$= |a_n - l_a + b_n - l_b| < \underbrace{|a_n - l_a|}_{<\delta/2 \text{ se } n > n_0} + \underbrace{|b_n - l_b|}_{<\delta/2 \text{ se } n > n_1}$$

$\Rightarrow |c_n - l_a - l_b| < \delta$

se $n > \max(n_0, n_1)$

$$|d_n - l_a \cdot l_b| =$$

$$= |a_n \cdot b_n - l_a \cdot l_b| = |\underline{a_n \cdot b_n - a_n l_b} + a_n l_b - l_a l_b| =$$

$$= |a_n \cdot (b_n - l_b) + (a_n - l_a) \cdot l_b| \overset{\text{Triangolare}}{<}$$

$$= |a_n| \cdot |(b_n - l_b)| + |(a_n - l_a) \cdot l_b| < \delta \quad \text{se } n > \bar{n}_a$$

a_n convergente $\Rightarrow$ limitata $\quad |a_n| < M \quad \forall n$ $\quad \square$

Analogamente si può mostrare che se

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l_a \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = l_b$$

e $l_b \neq 0$ allora
$l_b \neq \pm\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n/b_n = l_a/l_b$$

con la convenzione che se $l_a = +\infty$ $(-\infty)$ e $l_b > 0 \Rightarrow l_a/l_b = +\infty$ $(-\infty)$

$l_a = +\infty$ $(-\infty)$ $l_b < 0 \Rightarrow l_a/l_b = -\infty$ $(+\infty)$

Restano indeterminate le situazioni

$a_n \to +\infty \qquad b_n \to -\infty \qquad a_n + b_n \to ?$

$a_n \to 0 \qquad b_n \to \pm\infty \qquad a_n \cdot b_n \to ?$

$a_n \to 0 \qquad b_n \to 0 \qquad \dfrac{a_n}{b_n} \to ?$

$a_n \to \pm\infty \qquad b_n \to \pm\infty \qquad \dfrac{a_n}{b_n} \to ?$

$$\underbrace{\sqrt{n+1}}_{+\infty} - \underbrace{\sqrt{n}}_{-\infty} = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0}$$

$0 < \operatorname{sen} \frac{1}{n}$

$0 < \frac{1}{n} < 1 \qquad 0 < \operatorname{sen} \frac{1}{n} < \frac{1}{n}$

per confronto

$$\lim_{n \to +\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n} = 0$$

Tuttavia

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} n \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{n} = 1}$$

Oss.:

$$\frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0$$

$$= \frac{(-1)^n}{} \cdot \frac{1}{n}$$

Più in generale se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione infinitesima e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata $\Rightarrow \{d_n = a_n \cdot b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima

$M > 0$

$-M < b_n < M$ $\qquad$ $|b_n| < M$

$a_n \to 0$ $\qquad$ $\forall \delta > 0$

$\exists\, n_0 :$ $\qquad$ $\forall\, n > n_0$

$|a_n| < \delta$

$\parallel$

$|a_n - 0| < \delta$ $\qquad$ $-\delta < a_n < \delta$

Allora

$$|d_n| = |a_n \cdot b_n| = \overset{<\delta}{|a_n|} \cdot \overset{<M}{|b_n|} < M \cdot \delta$$

$$\Rightarrow -M\delta < d_n < M\delta \quad \frac{\text{se } n > n_0}{\text{se } n > n_0}$$

cioè $d_n \to 0$ ✓