Cinematica del punto materiale

→ Meccanica
- √ Cinematica → (studia il moto - chinema - non le sue cause)
- Statica
- Dinamica

→ Punto Materiale : punto geometrico dotato di massa (es: dimensioni trascurabili rispetto al percorso)

→ il moto di un punto materiale è completamente noto

⇕ (se e solo se)

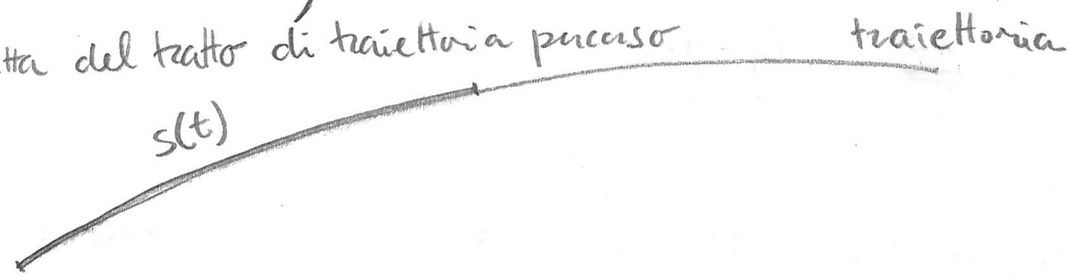
conosco la sua posizione nello spazio per ogni istante di tempo

→ traiettoria : luogo delle posizioni assunte dal punto materiale durante il suo moto

→ se conosco a priori la traiettoria del punto materiale, posso descrivere correttamente il moto con una funzione

$$s = s(t)$$ ← durante il tempo t

lunghezza del tratto di traiettoria percorso



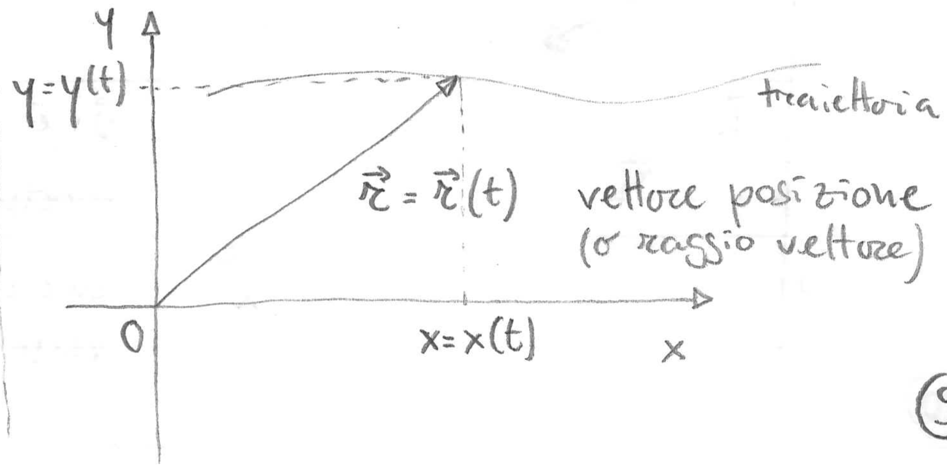
→ se NON conosco la traiettoria (caso più generale) posso sempre indicare la posizione nello spazio istante per istante rispetto ad un opportuno sistema di riferimento:

NOTA

Il vettore posizione cambia nel tempo e riassume in sé le componenti

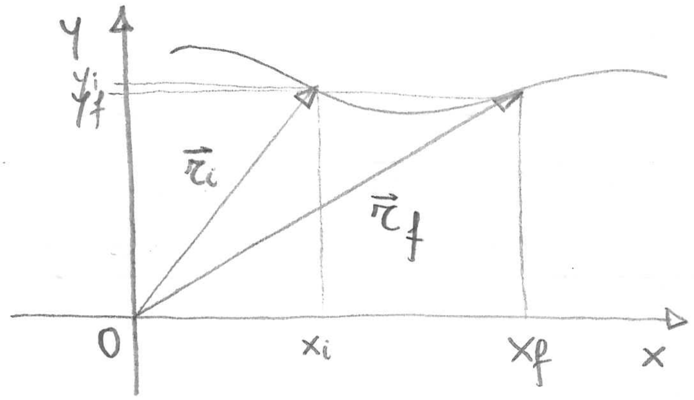
$x = x(t)$

$y = y(t)$



→ Spostamento

Considero un intervallo di tempo Δt, che inizia al tempo t_i e finisce al tempo t_f: $\Delta t = t_f - t_i$



$\vec{r}_i$: posizione al tempo t_i

$\vec{r}_f$: " " " t_f

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$

vettore spostamento

→ Velocità media

parentesi 1D

In 1D, il moto è unidimensionale. Possiamo assumerlo lungo l'asse x

0   x_i x_f x

x_i : posizione al tempo t_i

x_f : " " " t_f

$\Delta x = x_f - x_i$ spostamento

Definisco velocità media $v_m = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$

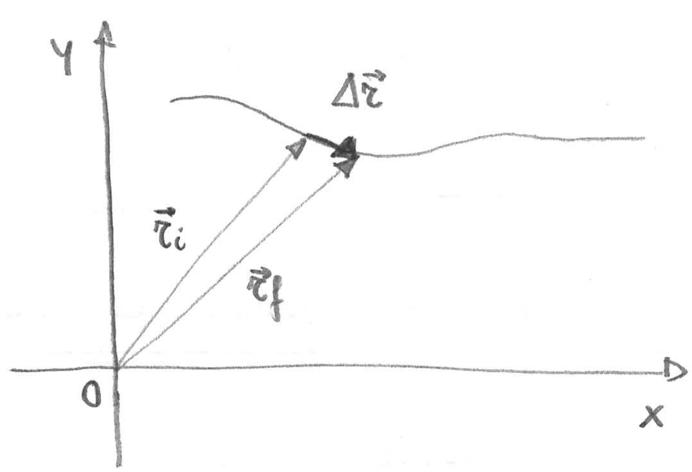
Analogamente nel caso 2D (o anche 3D):

$$\vec{v}_m \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{t_f - t_i}$$

→ Velocità istantanea

Se $\Delta t \to 0$ $\vec{v}_m \to \vec{v}$, dove $\vec{v}$ indica la velocità istantanea

("tende a 0" ovvero assume valori infinitesimi)



$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \left(= \frac{d\vec{r}}{dt} \right)$$

(derivata di $\vec{r}$ rispetto a t)

$\vec{v}$ è un vettore

modulo : $\left| \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \right|$

direzione : tangente alla traiett.

verso : quello del moto

Unità SI per la velocità : $\frac{m}{s}$

c.g.s $\longrightarrow \frac{cm}{s}$

pratiche $\longrightarrow \frac{Km}{h}$

NOTE : $\rightarrow$ $1 \ \frac{Km}{h} = \frac{10^3 \ m}{3{,}6 \cdot 10^3 \ s} = \frac{1}{3{,}6} \ \frac{m}{s}$

$\rightarrow$ $1 \ \frac{m}{s} = 3{,}6 \ \frac{Km}{h}$

$\rightarrow$ $c = 299792458 \ \frac{m}{s} = 3 \cdot 10^8 \ \frac{m}{s} = 3 \cdot 10^5 \ \frac{Km}{s} = 30 \ \frac{cm}{ns}$

29/10/2020

$\rightarrow$ Accelerazione media e istantanea

Sempre con riferimento ad un intervallo di tempo Δt, che inizia al tempo ti e finisce al tempo tf, definisco:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

accelerazione media

con $\vec{v}_f$: velocità istantanea al tempo tf

$\vec{v}_i$: velocità istantanea al tempo ti

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad \left(= \frac{d\vec{v}}{dt}, \text{ derivata di } \vec{v} \text{ rispetto a } t \right)$$

Unità SI per l'accelerazione $\frac{m}{s^2}$

cgs $\longrightarrow \frac{cm}{s^2}$

NOTE : $\rightarrow \vec{g}$ accelerazione di gravità è verticale, punta verso il basso ed ha modulo

$|\vec{g}| = g = 9{,}8 \ \frac{m}{s^2}$

Talvolta usata come unità pratica $1g = 9{,}8 \ \frac{m}{s^2}$

$\rightarrow$ il vettore $\vec{a}$ in genere NON è tangente alla traiettoria, ma ha sia una componente tangenziale che una componente "normale" (cioè ortogonale) alla traiettoria

$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$

$\vec{a}_n$: dovuta a variazioni della direzione di $\vec{v}$

$\vec{a}_t$: dovuta a variazioni del modulo di $\vec{v}$

→ Rappresentazione del moto

Per semplicità consideriamo un moto 1D, quindi tipo $x = x(t)$ (molte delle considerazioni che seguono si possono estendere a 2D o 3D, e valgono in particolare se il moto è del tipo $s = s(t)$ lungo una traiettoria nota)

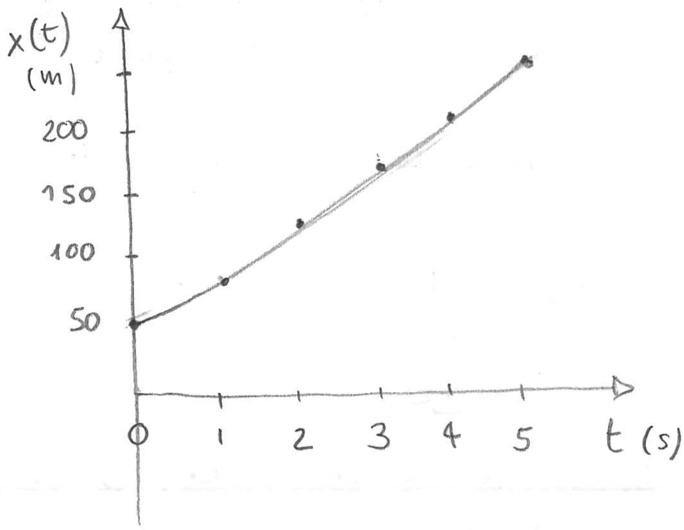
Ci sono almeno 3 modi diversi di rappresentare il moto:

1) Tabella della legge oraria.

t (s)	x (m)
0	50
1	82
2	118
3	158
4	202
5	250

si forniscono i valori di $x(t)$ corrispondenti a dei dati istanti di t

2) Diagramma della legge oraria



si utilizza un diagramma cartesiano con t sull'asse delle ascisse e $x(t)$ sulle ordinate

3) (se moto è regolare, ovvero la posizione $x(t)$ è esprimibile come una funzione analitica del tempo)

Forma funzionale della legge oraria:

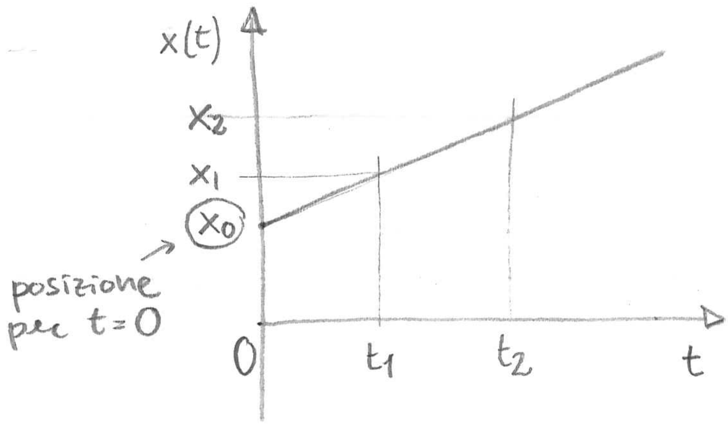
$$x(t) = \left(2\,\frac{m}{s^2}\right)t^2 + \left(30\,\frac{m}{s}\right)t + 50\ m$$

NOTA: come vedremo, in questo caso il metodo 3) è possibile perché il moto considerato è un moto "regolare" con accelerazione costante (moto uniformemente accelerato).

→ Moto rettilineo uniforme

$\downarrow$ 1D — $\downarrow$ v costante, ovvero non cambia nel tempo

v è costante. Sia $v = v_0$



$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

v_m è la pendenza media del tratto da x_1 a x_2

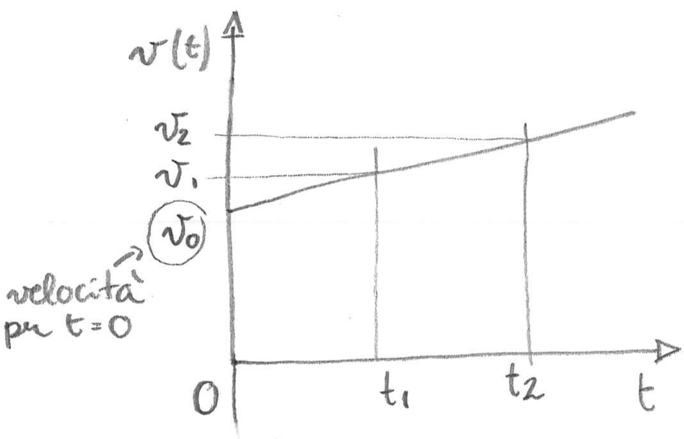
ma v è costante, quindi $v_m = v_0$ per ogni Δt

La pendenza della curva è costante e pari a v_0 ⇒
La curva è una retta con coefficiente angolare v_0 ⇒

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t}$$

→ Moto rettilineo $\underbrace{\text{uniformemente accelerato}}_{\text{acceleraz. costante}}$

a è costante. Sia $a = a_0$
Posso ripetere il ragionamento precedente nel diagramma della legge oraria della velocità



$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

$a_m = a_0$ per ogni Δt

$$\boxed{v(t) = v_0 + a_0 t} \quad \text{I}$$

Per il moto uniformemente accelerato si ha inoltre:

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2} \quad \text{II}$$

E sostituendo t da I in II si ha infine:

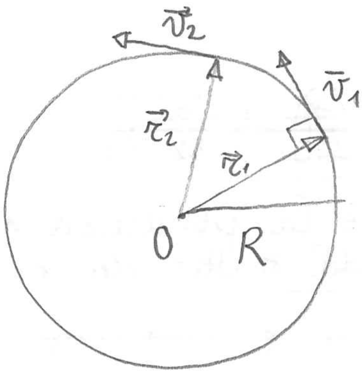
$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a_0 (x - x_0)} \quad \text{III}$$

Nota: la dipendenza da t di v e x è implicita, sottointesa

→ Moto Circolare Uniforme

Circolare ↓ la traiettoria è circolare

Uniforme ↓ la velocità è costante in modulo



$|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = R$

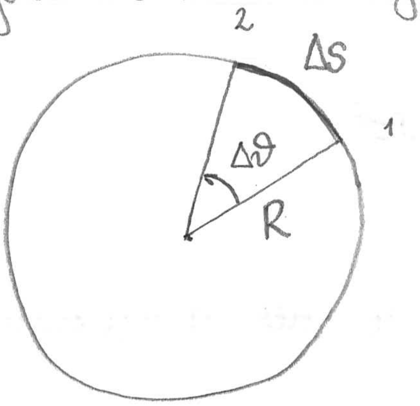
$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$

nota: in ogni istante $\vec{r}$ e $\vec{v}$ sono ortogonali tra di loro ($\vec{v}$ è tangente alla traiettoria)

nota: R e v sono costanti nel tempo mentre $\vec{r}$ e $\vec{v}$ cambiano continuamente direzione.

- velocità angolare

Considero $\Delta t = t_2 - t_1$ e chiamo $\Delta\vartheta$ il corrispondente intervallo angolare e Δs la lunghezza del corrispondente arco di circonferenza.



Definisco:

- velocità angolare media $\omega_m = \dfrac{\Delta\vartheta}{\Delta t}$
- " " istantanea $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vartheta}{\Delta t}$

Poiché $\Delta\vartheta = \dfrac{\Delta s}{R}$

si ha $\dfrac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t \cdot R} = \dfrac{v}{R} = \omega_m = \omega$

ω è costante, perché rapporto tra due costanti (v ed R).

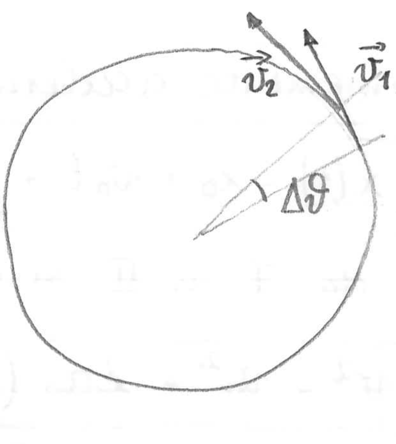
ω si misura in $\dfrac{rad}{s}$

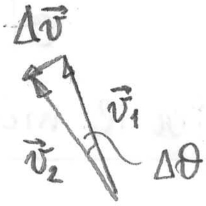
$$\boxed{\omega = \frac{v}{R}} \quad \text{o} \quad \boxed{v = \omega R}$$

- accelerazione

$\vec{a}_m = \dfrac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$





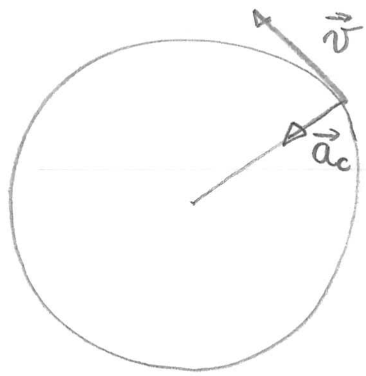
$|\Delta\vec{v}| \cong v \cdot \Delta\vartheta$

$|\vec{a}| = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} v \dfrac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = \omega v$

Quindi $|\vec{a}| = \omega v = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$

Per quanto riguarda direzione e verso di $\vec{a}$, essi sono gli stessi di $\Delta\vec{v}$. $\Delta\vec{v}$ si dispone ortogonale a $\vec{v}$, quindi parallelo ad $\vec{r}$, e punta verso il centro. Si parla di <u>accelerazione centripeta</u> a_c.

$$\boxed{a_c = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}}$$



Il moto circolare uniforme è <u>periodico</u> con periodo T

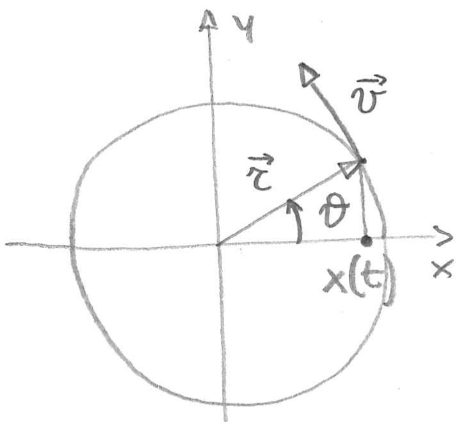
$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$ ← in questo caso si dice anche "pulsazione" del moto periodico

$$T = \frac{1}{\nu}$$ ← "ni", frequenza, si misura in Hz ($1 Hz = 1 s^{-1}$)

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\omega = 2\pi\nu$$

→ Moto Armonico



$\theta = \omega t$

$x(t) = R\cos(\theta) = R\cos(\theta t)$

esempio di moto armonico, molto frequente in natura

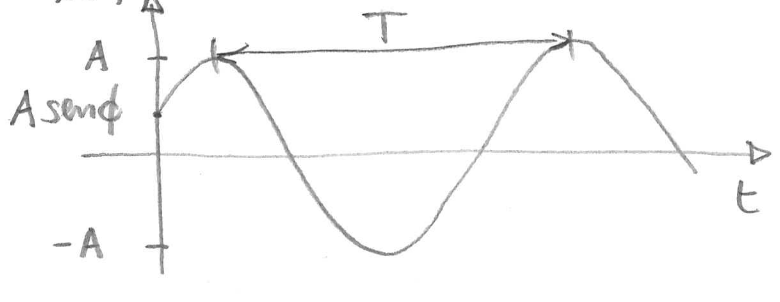
In generale è moto armonico ogni moto del tipo:

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

A ← ampiezza

ω ← pulsazione $\omega = 2\pi\nu$

ϕ ← fase (condizioni iniziali)



$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Da $x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$ si ottiene

$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \phi)$ e

$a(t) = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)$