

ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 3

Trieste, 29 ottobre 2020

- Una matrice quadrata $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in M(n \times n, \mathbb{R})$ è detta simmetrica se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni coppia di indici. Invece A è detta antisimmetrica se $a_{ij} = -a_{ji}$ per ogni coppia di indici.
 - Dimostrare che le matrici simmetriche formano un sottospazio vettoriale, denotato $Sym(n \times n, \mathbb{R})$, di $M(n \times n, \mathbb{R})$. Trovare una base e la dimensione di questo sottospazio;
 - stessa domanda per l'insieme delle matrici antisimmetriche $Alt(n \times n, \mathbb{R})$;
 - Dimostrare che $M(n \times n, \mathbb{R}) = Sym(n \times n, \mathbb{R}) \oplus Alt(n \times n, \mathbb{R})$ (somma diretta).
- Dire, motivando la risposta, se in \mathbb{R}^3 il vettore w è o meno combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 nei seguenti casi:
 - $w = (6, 2, 1)$, $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (7, 3, 1)$, $v_3 = (2, 5, 8)$;
 - $w = (2, 1, 1)$, $v_1 = (1, 5, 1)$, $v_2 = (0, 9, 1)$, $v_3 = (3, -1, 1)$.
- Nei seguenti casi, dire se i vettori v_1, v_2, v_3 costituiscono una base di \mathbb{R}^3 . In caso negativo, trovare una base e la dimensione del sottospazio da essi generato.
 - $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (3, 0, -1)$, $v_3 = (-1, 1, -1)$;
 - $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (3, 0, -1)$, $v_3 = (-1, 18, 13)$;
 - $v_1 = (1, 2, -3)$, $v_2 = (1, 0, -1)$, $v_3 = (1, 10, -11)$.
- Siano U, W i seguenti sottospazi di \mathbb{R}^4 : $U = \langle (1, 0, 1, 0), (1, 2, 3, 4) \rangle$, $W = \langle (0, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1) \rangle$. Dire se la loro somma è diretta o meno.