29 ottobre

Mar 3 Nov   San giusto

Lunedì 2 lezione regolare

Giov. 5   16 tutorato analisi

Mercoledì 4   ricevimento cancellato

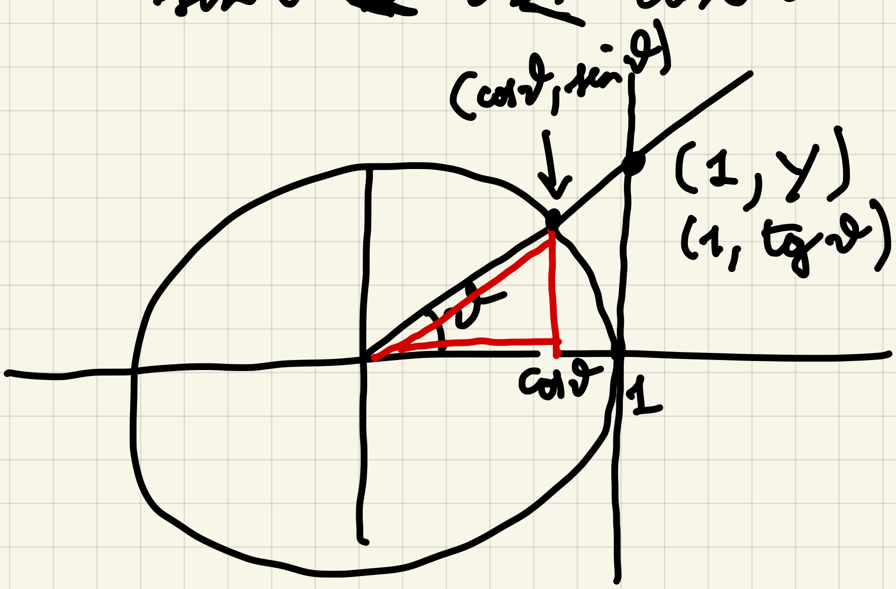
spostato a Venerdì 6 alle 16.

Limiti notevoli

Area Triangolo > Area settore circolare

per $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$

$$\sin\vartheta < \vartheta < \tan\vartheta$$



$$\frac{1}{\cos\vartheta} = \frac{y}{\sin\vartheta}$$

$$y = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}$$

Area triangolo $= \frac{\tan\vartheta}{2} > \frac{\vartheta}{2}$

Questo completa la dimostrazione di $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Teor (limite notevole)

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Osservazione Sia X il dominio di definizione di $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Si ha che $X \supseteq [0, +\infty) \Longrightarrow$ $\sup X = +\infty$. Si osservi che per $x \leq -1$ si ha $1 + \frac{1}{x} \geq 0$

Per $x \leq -1 \Longrightarrow$ si ha $1 + \frac{1}{x} \geq 0$

$x \leq -1 \quad \cdot \frac{1}{x}$

$1 \geq -\frac{1}{x} \iff 1 + \frac{1}{x} \geq 0$

In particolare per $x < -1$ si ha

$1 + \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ e' ben definito per $x < -1$.

$X \supseteq (-\infty, -1) \Rightarrow \inf X = -\infty$

$X \supseteq (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$

Esercizio Trovare X.

<u>Notazione</u> Sia $f: X \to \mathbb{R}$

e siano $\inf X = -\infty$, $\sup X = +\infty$

Se si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

si scrive $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$.

<u>Teor</u> $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x_0}{n}\right)^n = e^{x_0}$$

<u>Dim</u> Fissiamo $x_0 \in \mathbb{R}$. Se $x_0 = 0$ il limite è ovvio

$$\lim_{n \to +\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{0}{n}\right)}_{1}^n = \lim_{n \to +\infty} 1 = 1 = e^0$$

Sia ora $x_0 > 0$. Allora

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x_0}{n}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{x_0}{n}\right)^{\frac{n}{x_0}}\right]^{x_0}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x_0}{n}\right)^{\frac{n}{x_0}} = e$$

$$\frac{n}{x_0} \longrightarrow +\infty$$

Il fatto che $\lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$

$\Rightarrow$ che per ogni successione $y_n \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$

si ha $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n}=e$

$y_n=\frac{n}{x_0}$ $\quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x_0}{n}\right)^{\frac{n}{x_0}}=e$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x_0}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{x_0}{n}\right)^{\frac{n}{x_0}}\right]^{x_0}=$$

Più avanti vedremo

$\lim_{x\to e} x^{x_0}=e^{x_0}$ (più in generale, dimostreremo che la funzione $x^{x_0}:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, è continua)

$$=\lim_{z\to e} z^{x_0}=e^{x_0}.$$

Esercizio Sia $f : X \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ con $x_0 \in (X \setminus \{x_0\})'$. Allora se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$ si ha che per ogni successione $\{x_n\}$ in $X \setminus \{x_0\}$ la quale soddisfi $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$, si ha

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L \qquad \square$$

$$\lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x_0}{n}\right)^{\frac{n}{x_0}} = e$$

$$\lim_{z \to e} z^{x_0} = e^{x_0} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{x_0}{n}\right)^{\frac{n}{x_0}}\right]^{x_0} = e^{x_0}$$

Q_0 capitale iniziale al tempo 0

$r\%$ tasso di interesse, Q_t

1) Un primo modo per calcolare il tasso di interesse, $Q_t^{(1)}$

Alla fine dell'anno ricevo

$$\Delta Q_0^{(1)} = \frac{r}{100} Q_0$$

$$Q_1^{(1)} = Q_0 + \Delta Q_0^{(1)} = Q_0 + \frac{r}{100} Q_0 =$$

$$= \left(1 + \frac{r}{100}\right) Q_0$$

Alla fine del secondo anno ricevo

$$\Delta Q_1^{(1)} = \frac{r}{100} Q_1^{(1)} = \frac{r}{100}\left(1 + \frac{r}{100}\right) Q_0$$

$$Q_2^{(1)} = Q_1^{(1)} + \Delta Q_1^{(1)} =$$

$$= \left(1 + \frac{r}{100}\right) Q_0 + \frac{r}{100} \left(1 + \frac{r}{100}\right) Q_0$$

$$= \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 Q_0$$

$$Q_t^{(1)} = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t Q_0$$

2) Un secondo significato porta a una nuova funzione $Q_t^{(2)}$

Qui si comincia con Q_0. A metà anno

$$\Delta Q_0^{(2)} = Q_0 \frac{r/2}{100}$$

$$Q_{\frac{1}{2}}^{(2)} = Q_0 + Q_0 \frac{r/2}{100} = \left(1 + \frac{r/2}{100}\right) Q_0$$

Passato un altro semestre

$$\Delta Q_{\frac{1}{2}}^{(2)} = Q_{\frac{1}{2}}^{(2)} \frac{r/2}{100} = \frac{r/2}{100} \left(1 + \frac{r/2}{100}\right) Q_0$$

$$Q_1^{(2)} = \Delta Q_{\frac{1}{2}}^{(2)} + Q_{\frac{1}{2}}^{(2)} =$$

$$= \frac{r/2}{100}\left(1 + \frac{r/2}{100}\right) Q_0 + \left(1 + \frac{r/2}{100}\right) Q_0$$

$$= \left(1 + \frac{r/2}{100}\right)^2 Q_0$$

$$Q_t^{(2)} = \left(1 + \frac{r/2}{100}\right)^{2t} Q_0$$

3) Si può dividere l'anno in n periodi di eguale lunghezza ed alla fine di ogni periodo rivalutare il capitale di inizio periodo del $\frac{r/n}{100}$

$$Q_t^{(n)} = \left(1 + \frac{r/n}{100}\right)^{nt} Q_0$$

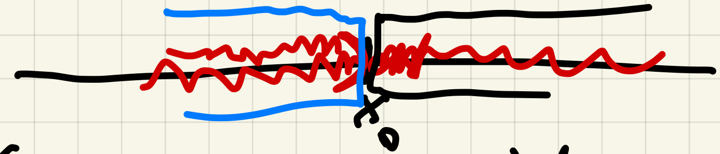
4) $$\lim_{n \to +\infty} Q_t^{(n)} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{\frac{r}{100}}{n}\right)^{nt} Q_0$$

$$= Q_0 \lim_{n \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{\frac{r}{100}}{n}\right)^{\frac{n}{r/100}}\right]^{\frac{r}{100}t}$$

$$= Q_0 \lim_{n \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{Y_n}\right)^{Y_n}\right]^{\frac{r}{100}t} \qquad Y_n = \frac{n}{\frac{r}{100}}$$

$$= Q_0 \, e^{\frac{r}{100}t}$$

Def Sia $f : X \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ con $x_0 \in X'$.



1) Se $x_0 \in \left(X \cap (-\infty, x_0) \right)'$

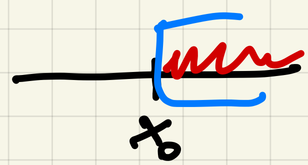
e se esiste

$$\lim_{x \to x_0} f|_{X \cap (-\infty, x_0)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

scriviamo che

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L.$$

2) Se $x_0 \in \left(X \cap (x_0, +\infty) \right)'$



e se esiste

$$\lim_{x \to x_0} f|_{X \cap (x_0, +\infty)} = R$$

allora scriviamo

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = R$$

Esercizio Sia $f : X \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ e supponiamo che $x_0 \in (X \cap (-\infty, x_0))'$ e $x_0 \in (X \cap (x_0, +\infty))'$.

Sono equivalenti:

1) esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$;

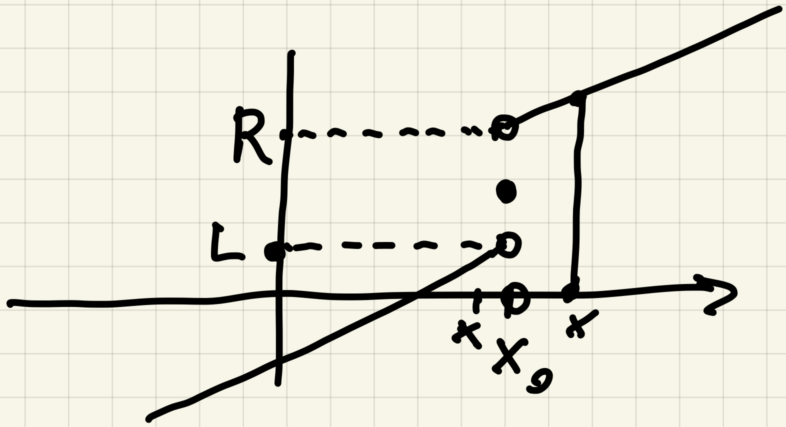
2) esistono $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e sono uguali

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Inoltre, quando 1) e 2) sono vere, si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Teor Sia $f : X \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ crescente



1) se $x_0 \in \left(X \cap (-\infty, x_0)\right)'$ allora

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup \left\{ f(x) : \begin{array}{l} x < x_0 \\ x \in X \end{array} \right\}$$

$$(= L)$$

2) se $x_0 \in \left(X \cap (x_0, +\infty)\right)'$ allora

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf \left\{ f(x) : \begin{array}{l} x > x_0 \\ x \in X \end{array} \right\}$$