Funzioni di più variabili

Dr. Daniele Toffoli

Dipartimento di Scienze Chimiche e Farmaceutiche, UniTS

Outline

Generalità e rappresentazione grafica

Concetti

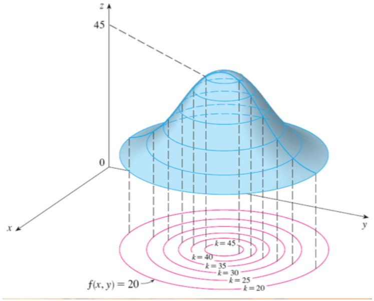
Definizioni

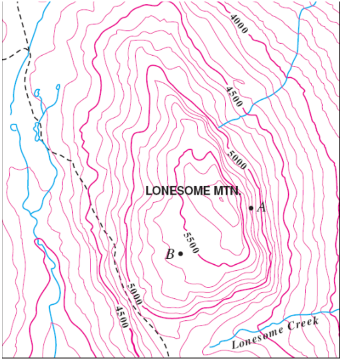
- legge che associa a una ennupla di scalari uno scalare
  - $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ o $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$
- caso particolare di funzioni vettoriali: $f : \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}^m$ $(f : V \longrightarrow W)$
- equazioni di stato termodinamiche: e.g. $V = \frac{nRT}{p}$
  - $V = V(n, p, T)$
- facilmente visualizzabile per $n = 2$
  - informazioni parziali per $n > 2$

Generalità e rappresentazione grafica

Rappresentazione grafica

Curve di livello





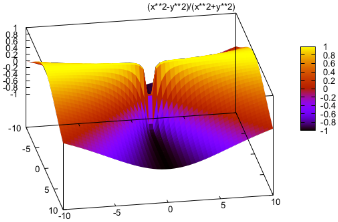
- $f(x, y)$: superficie in 3D
- curve di livello: $f(x, y) = c$, con c assegnato

Differenziazione parziale

Definizioni e notazione

limite di funzioni a più variabili

- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = c$ se $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tale che
  - $\forall\ (x,y) \in$D tale che $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2 \Longrightarrow |f(x,y) - c| < \varepsilon$
- se $c = f(x_0,y_0) \Longrightarrow f(x,y)$ continua in (x_0,y_0)
- non sempre esiste. E.g. $f = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
  - $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 1$, $\lim_{y\to 0} f(0,y) = -1$



Differenziazione parziale

Definizioni e notazione

Definizione

- Sia $f(x,y)$ definita nel dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$, e $(x_1,y_1) \in$ D
- derivata parziale di f rispetto a x nel punto (x_1,y_1), se $\exists$ finito:

$$\lim_{x \to x_1} \frac{f(x,y_1) - f(x_1,y_1)}{x - x_1} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_1,y_1)$$

- Analogamente, se $\exists$ finito:

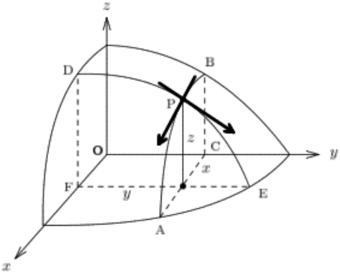
$$\lim_{y \to y_1} \frac{f(x_1,y) - f(x_1,y_1)}{y - y_1} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_1,y_1)$$

    - altre $n-1$ variabili costanti

Differenziazione parziale

Definizioni e notazione

Interpretazione geometrica



- I vettori $\mathbf{v} = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1))$ e $\mathbf{w} = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1))$ tangenti
  - a Gr(f) in $\mathbf{P} = (x_1, y_1, f(x_1, y_1))$
  - generano il piano tangente a $\mathbf{P}$

Differenziazione parziale

Definizioni e notazione

Derivate di ordine superiore

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sono funzioni di due variabili
- Possiamo prendere le derivate parziali (derivate seconde)
  - se $\exists$ finiti i limiti
- $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
- derivate miste: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$
  - se $f \in C^2 \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$
- per una funzione di 2 variabili:
  - 2 derivate prime
  - 2^2 derivate seconde
  - 2^n derivate di ordine n

Differenziazione parziale

Definizioni e notazione

Notazioni alternative

- notazione compatta: $f_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$; $f_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$
  - conveniente per derivate di ordine superiore e.g. $f_{xx} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f_{xyz} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ ...
- notazione usata in termodinamica: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz}$
  - pedici per le variabili tenute costanti (f funzione di 3 variabili)

Differenziazione parziale

Esempi

$V = \frac{nRT}{p}$

- $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,n} = -\frac{nRT}{p^2}$
- $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,n} = \frac{nR}{p}$
- $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{p,T} = \frac{RT}{p}$

$f = \sin x \cos y + \frac{x}{y}$

- $f_x = \cos x \cos y + \frac{1}{y},\ f_y = -\sin x \sin y - \frac{x}{y^2}$
- $f_{xx} = -\sin x \cos y;\ f_{yy} = -\sin x \cos y + 2\frac{x}{y^3}$
- $f_{xy} = -\cos x \sin y - \frac{1}{y^2} = f_{yx}$

Differenziazione parziale

Esempi

$(p + \frac{n^2 a}{V^2})(V - nb) - nRT = 0$

- $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,n} = -\frac{nR}{\frac{n^2 a}{V^2}(1-\frac{2nb}{V})-p}$
- $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,n} = \frac{V-nb}{\frac{n^2 a}{V^2}(1-\frac{2nb}{V})-p}$
- $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V,n} = \frac{nR}{V-nb}$

Differenziale totale

Generalità

Definizioni

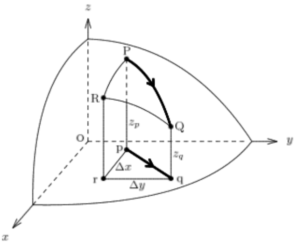
- dominio: set di punti aperto tale che dati due punti $P, Q \in \mathrm{D}$ è possibile connetterli con una curva che giace interamente in D
- set aperto: per ogni punto del set è possibile trovare un intorno del punto che giace interamente in D
- set chiuso: il set complementare è aperto
- punto di contorno: ogni intorno del punto contiene sia punti che non appartengono a D che punti che appartengono a D
- punto interno: punto per il quale esiste un intorno che giace interamente in D
- D e' dominio se ogni suo punto è interno.

Differenziale totale

Generalità

Definizione

- $f(x,y)$ definita in $D \subseteq \mathbb{R}^2$, e $(x,y) \in$ D
- $(x + \Delta x, y + \Delta y) \in$ D
- $\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$
    - $\Delta f = \Delta f(\Delta x, \Delta y)$
    - $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \Delta f = 0$ se f è continua in (x,y)

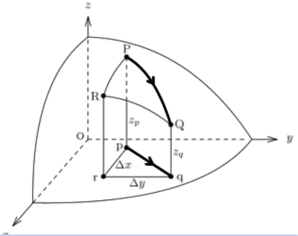


Differenziale totale

Generalità

Definizione: $f(x, y)$ è differenziabile in (x, y) se

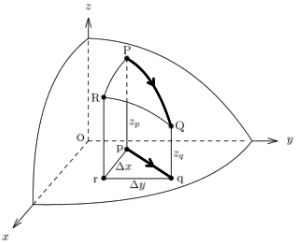
- $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon$
  - A e B indipendenti da Δx, Δy
  - $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\varepsilon}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$
- $A\Delta x + B\Delta y$: differenziale totale di f in (x, y)
  - $df = A\Delta x + B\Delta y$
  - $\Delta f \cong df$ (piccoli Δx, Δy)



Differenziale totale

Esempio

$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$



- $\Delta f = \underbrace{(2ax + by)}_{A} \Delta x + \underbrace{(bx + 2cy)}_{B} \Delta y + \underbrace{a(\Delta x)^2 + b\Delta_x \Delta y + c(\Delta y)^2}_{\varepsilon}$
  - $\left|\frac{\varepsilon}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}\right| \leq |a||\Delta x| + |b||\Delta y| + |c||\Delta y|$
- $df = (2ax + by)\Delta x + (bx + 2cy)\Delta y$

Differenziale totale

Teorema

- Se f è differenziabile in (x, y) allora:
  - f è continua in (x, y)
  - $A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ e $B = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$
  - df è unico
- Il converso non è necessariamente vero

Lemma

- Data $f(x, y)$ con derivate parziali prime continue in D:
  - f è differenziabile ovunque in D
  - $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \Delta y$
  - per n variabili: $df = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dx_i$

Differenziale totale

Esempi

- $z = \frac{x}{y}$
  - $dz = \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy$
- $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
  - $du = \frac{1}{u}(xdx + ydy + zdz)$
- $x = r\sin\theta\cos\phi$
  - $dx = \sin\theta\cos\phi dr + r\cos\theta\cos\phi d\theta - r\sin\theta\sin\phi d\phi$

Differenziale totale

Esempi

Volume di un fluido: $V = V(n, p, T)$

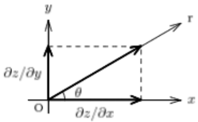
$$
\begin{aligned}
dV &= \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{n,T} dp + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{n,p} dT + \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{p,T} dn \\
&= -\kappa V dp + \alpha V dT + V_m dn
\end{aligned}
$$

- $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{n,p}$ (espansività termica)
- $\kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{n,T}$ (compressibilità isoterma)
- $V_m = \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{p,T}$ (volume molare)

Differenziale totale

Derivate direzionali

derivata lungo la direzione $\hat{\mathbf{v}}$



- f differenziabile in $\mathbf{r} = (x, y)$ e $\hat{\mathbf{v}}$ una direzione
- derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{v}}}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{v}}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{r} + h\hat{\mathbf{v}}) - f(\mathbf{r})}{h}$$

- in 2 dimensioni: $\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{v}}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cos\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \sin\theta$

Differenziale totale

Punti stazionari

- punti stazionari (critici): punti per i quali $df = 0$

Teorema

- $f(x, y)$ continua con derivate prime e seconde continue e sia $(x_0, y_0) \in \mathrm{D}$ punto critico di f:

$$\begin{cases} |\mathbf{H}f| > 0, f_{xx} + f_{yy} < 0 & \textit{massimo relativo} \\ |\mathbf{H}f| > 0, f_{xx} + f_{yy} > 0 & \textit{minimo relativo} \\ |\mathbf{H}f| < 0 & \textit{punto di sella} \\ |\mathbf{H}f| = 0 & \textit{indeterminato} \end{cases}$$

- Matrice Hessiana: $\mathbf{H}f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}$

Proprietà differenziali

Derivata totale (derivata di funzioni composte)

- $f(x, y)$ definita in D e differenziabile
- se x e y sono funzioni della variabile t:
  - $x = x(t)$; $y = y(t)$
- esiste $\frac{df}{dt}$, derivata totale di f:

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt}$$

- data $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\frac{dx_1}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\frac{dx_n}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\frac{dx_i}{dt} \end{aligned}$$

Proprietà differenziali

Derivata totale (derivata di funzioni composte)

Esercizi

1. $z = x^2 + y^3$; $x = e^t$; $y = e^{-t}$. Trova $\frac{dz}{dt}$
   - per sostituzione
   - usando la chain rule
2. walking on a circle $x^2 + y^2 = a^2$
   - $x = a\cos\theta$; $y = a\sin\theta$
   - $\frac{df}{d\theta} = x\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x - y\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$
3. caso particolare: $z = f(x, y)$, $y = y(x)$
   - $\frac{df}{dx} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \frac{dy}{dx}$

Proprietà differenziali

Cambio di variabili indipendenti

- $z = f(x, y)$ in D e differenziabile
- se $x = x(u, v)$; $y = y(u, v)$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_u + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_u$$

- In forma matriciale:

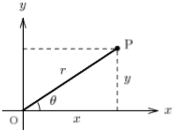
$$\begin{bmatrix} f_u \\ f_v \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v & \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v \\ \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_u & \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_u \end{bmatrix}$

Proprietà differenziali

da coordinate cartesiane a polari

$x = r\cos\theta;\ y = r\sin\theta$

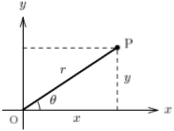


- $\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_\theta = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \frac{x}{r} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \frac{y}{r}$
- $\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_r = -y\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y + x\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x$
- In forma matriciale: $\begin{bmatrix} f_r \\ f_\theta \end{bmatrix} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$
  - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -y & x \end{bmatrix}$

Proprietà differenziali

da coordinate cartesiane a polari

relazioni inverse



- $\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} f_r \\ f_\theta \end{bmatrix} \; (r \neq 0)$
- $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_\theta \cos\theta - \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_r \frac{\sin\theta}{r}$
- $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_\theta \sin\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_r \frac{\cos\theta}{r}$

Proprietà differenziali

Cambio di variabili indipendenti

equazione di Laplace ($\nabla^2 f = 0$) in due dimensioni

- importante nelle scienze fisiche
  - forze conservative
- in coordinate cartesiane:

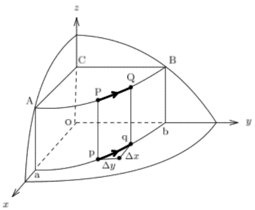
$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right] f = 0$$

- in coordinate polari:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right] f = 0$$

Proprietà differenziali

Variazioni di x e y che lasciano $f(x, y)$ costante



- $F(x, y) = 0$ definisce implicitamente $y = y(x)$
- gradiente della curva di livello:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x}$$

- -1 rule:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = -1$$

Proprietà differenziali

Variazioni di x e y che lasciano $f(x, y)$ costante

esempi

- $z = x^2y^3$:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = -\frac{2}{3}\frac{y}{x}$$

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_r = -\frac{x}{y}$$

- $dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp$:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = -\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T} = \frac{\alpha}{\kappa}$$

Forme differenziali e differenziali esatti

Definizioni e proprietà

differenziale esatto

- forma differenziale: $F(x,y)dx + G(x,y)dy$
  - $F(x,y)$, $G(x,y)$ arbitrarie
- differenziale esatto: $\exists\ z(x,y)$ tale che:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \\ G(x,y) &= \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \end{aligned}$$

  - $dz = F(x,y)dx + G(x,y)dy$

Forme differenziali e differenziali esatti

Definizioni e proprietà

Relazione di reciprocità di Eulero

- $F(x, y)dx + G(x, y)dy$ è esatto se:

$$\left[\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right]_x = \left[\frac{\partial G(x,y)}{\partial x}\right]_y$$

- equivalentemente:

$$\left(\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y \partial x}\right) = \left(\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x \partial y}\right)$$

Forme differenziali e differenziali esatti

Definizioni e proprietà

$y \cos x dx + \sin x dy$

- è un differenziale esatto:

$$\begin{cases} F(x,y) = y \cos x & \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \cos x \\ G(x,y) = \sin x & \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = \cos x \end{cases}$$

- $z(x,y) = y \sin x$

Forme differenziali e differenziali esatti

Relazioni di Maxwell

$dU = TdS - pdV$

- $T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V$
- $p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V$$

$dH = TdS + Vdp$

- $T = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p$
- $V = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p$$

Forme differenziali e differenziali esatti

Relazioni di Maxwell

$dA = -SdT - pdV$

- $S = -\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_V$
- $p = -\left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_T$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

$dG = Vdp - SdT$

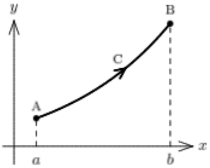
- $S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p$
- $V = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T$

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

Integrali di linea o curvilinei

Generalità

Definizione



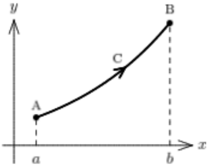
- $\mathcal{C}$: cammino di integrazione ($y = f(x)$)
- $F(x, y)$: proprietà associata ad ogni punto di $\mathcal{C}$
  - e.g. densità di massa; forza ...
- Integrale curvilineo (o di linea):

$$\mathcal{I} = \int_{\mathcal{C}} F(x, y) ds$$

Integrali curvilinei di I specie

Metodi di calcolo

$\mathcal{C}$: $y = f(x)$, $x \in [a, b]$



$$\mathcal{I} = \int_{\mathcal{C}} F(x, y)ds = \int_a^b F(x, y(x))\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

Integrali curvilinei di I specie

Esempi

$F(x,y) = xy$, $\mathcal{C}$: $y = \frac{x^2}{2}$, $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int_{\mathcal{C}} F(x,y)ds = \int_0^1 x\left(\frac{x^2}{2}\right)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}dx = (\sqrt{2}+1)\frac{1}{15}
\end{aligned}$$

- *hint:* cambio di variabile $u = 1 + x^2$

Integrali curvilinei di II specie

Metodi di calcolo

Integrali di forme differenziali

$$\mathcal{I} = \int_{\mathcal{C}} [F(x,y)dx + G(x,y)dy]$$

- $\mathcal{C}$: $y = y(x)$, $x \in [a,b]$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int_a^b \left[F(x, y(x))dx + G(x, y(x))\frac{dy}{dx}dx \right] \\
&= \int_a^b \left[F(x, y(x)) + G(x, y(x))\frac{dy}{dx} \right] dx
\end{aligned}$$

Integrali curvilinei di II specie

Metodi di calcolo

Integrali di forme differenziali

$$\mathcal{I} = \int_{\mathcal{C}} [F(x,y)dx + G(x,y)dy]$$

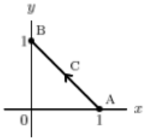
- $\mathcal{C}$: $x = x(t);\ y = y(t);\ t \in [t_A, t_B]$ (forma parametrica)

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_{t_A}^{t_B} \left[F(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} dt + G(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} dt \right] \\ &= \int_{t_A}^{t_B} \left[F(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + G(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right] dt \end{aligned}$$

Integrali curvilinei di II specie

dipendenza dal cammino di integrazione

$\mathcal{I} = \int_{\mathcal{C}}[-ydx + xydy]$



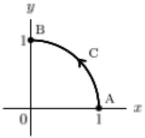
- $\mathcal{C} : y = 1 - x \longrightarrow dy = \frac{d}{dx}(1 - x)dx = -dx$

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_{\mathcal{C}}[-ydx + xydy] = \int_{x=1}^{x=0}[-(1-x)dx + x(1-x)(-dx)] \\ &= \int_0^1 (1 - x^2)dx = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Integrali curvilinei di II specie

dipendenza dal cammino di integrazione

$\mathcal{I} = \int_{\mathcal{C}}[-ydx + xydy]$



- $\mathcal{C}$: $x = \cos\theta$; $y = \sin\theta$; $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} [-\sin\theta(-\sin\theta d\theta) + \cos(\theta)\sin(\theta)\cos\theta d\theta] \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin^2\theta + \sin\theta - \sin^3\theta] d\theta \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Integrali curvilinei di II specie

indipendenza dal cammino di integrazione

$\mathcal{I} = \int_{\mathcal{C}}[F(x,y)dx + G(x,y)dy]$

- $F(x,y)dx + G(x,y)dy$ differenziale esatto
  - $df = F(x,y)dx + G(x,y)dy$

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int_{\mathcal{C}}[F(x,y)dx + G(x,y)dy] \\ &= \int_A^B df = f(B) - f(A)\end{aligned}$$

- $\mathcal{I}$ è indipendente da $\mathcal{C}$ che unisce i punti A e B

Integrali curvilinei di II specie

Esempio

$\mathcal{I} = \int_{\mathcal{C}} [(9x^2 + 4y^2 + 4xy)dx + (8xy + 2x^2 + 3y^2)dy]$ da $A = (0,0)$ a $B = (1,2)$

- differenziale esatto: $\left(\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial G(x,y)}{\partial x}\right)$
- $f(x,y) = 3x^3 + 4y^2x + 2x^2y + y^3 + c$

$$\mathcal{I} = f(1,2) - f(0,0) = 31$$

- $\mathcal{C}$: $y = 2x$, $x \in [0,1]$:

$$\mathcal{I} = \int_0^1 93x^2 dx = 31$$

- $\mathcal{I}$ è indipendente da $\mathcal{C}$ che unisce i punti A e B