Teorema (determinazione di un'applicazione lineare su una base)

Siano V, W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, e siano $\{v_i\}_{i \in I}$ una base di V e $\{w_i\}_{i \in I}$ una famiglia di vettori di W. Allora esiste ed è unica un'applicazione lineare

$$f : V \longrightarrow W$$

t.c. $f(v_i) = w_i \quad \forall i \in I$.

Dim 1) unicità   Supponiamo che $f : V \to W$ sia lineare e t.c.

$$\boxed{f(v_i) = w_i} \quad \forall i \in I$$

Sia $v \in V \Rightarrow \exists! \{\lambda_i\}_{i \in I}$, $\lambda_i \in K$ $\lambda_i \neq 0$ per al più un numero finito di indici $i \in I$ t.c. $\boxed{v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i}$ (comb. lin. finita)

$$\left(v = \lambda_{i_1} v_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_k} v_{i_k} \right)$$

$$f(v) = f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(v_i) = \boxed{\sum_{i \in I} \lambda_i w_i}$$

Dal fatto che i $\{\lambda_i\}$ sono univocamente determinati da $v \in V$ segue che f è unica

2) esistenza.

$$\boxed{f(v) = \sum_{i \in I} \lambda_i w_i} \quad , \quad \boxed{v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i}$$

$$\rightsquigarrow \quad f : V \longrightarrow W$$

Dobbiamo far vedere che f è lineare

$$u = \sum_{i \in I} \mu_i v_i \in V$$ (solo un numero finito dei μ_i è $\neq 0$)

$$f(v+u) = f\Big(\underbrace{\sum_{i \in I} \lambda_i v_i}_{v} + \underbrace{\sum_{i \in I} \mu_i v_i}_{u}\Big) = f\Big(\sum_{i \in I} (\lambda_i + \mu_i) v_i\Big) =$$

$$= \sum_{i \in I} (\lambda_i + \mu_i) w_i \overset{v}{=} \sum_{i \in I}(\lambda_i w_i + \mu_i w_i) = \underbrace{\sum_{i \in I} \lambda_i w_i}_{f(v)} + \underbrace{\sum_{i \in I} \mu_i w_i}_{f(u)} = f(v) + f(u)$$

$$f(v+u) = \cdots = \sum_{i\in I}\left(\lambda_i w_i + \mu_i w_i\right) = \underbrace{\sum_{i\in I}\lambda_i w_i}_{f(v)} + \underbrace{\sum_{i\in I}\mu_i w_i}_{f(u)} = f(v)+f(u)$$

$\lambda \in \mathbb{K}$, $v \in V$

$$v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$$

$$f(\mu v) = f\Big(\mu \sum_{i \in I} \lambda_i v_i\Big) = f\Big(\sum_{i \in I} (\mu \lambda_i) v_i\Big) \overset{\text{definizione di } f}{=} \sum_{i \in I} (\mu \lambda_i) w_i =$$

$$= \mu \underbrace{\sum_{i \in I} \lambda_i w_i}_{f(v)} = \mu f(v)$$

Quindi f è lineare

Esempi

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\{e_1, e_2, e_3\}$ base canonica di $\mathbb{R}^3$

$\{t_1, t_2\}$ base canonica di $\mathbb{R}^2$

$e_1 = (1, 0, 0)$
$e_2 = (0, 1, 0)$
$e_3 = (0, 0, 1)$

$t_1 = (1, 0)$
$t_2 = (0, 1)$

f lineare t.c.

$$f(e_1) = 2t_1 + t_2 = w_1$$
$$f(e_2) = t_1 - t_2 = w_2$$
$$f(e_3) = t_2 = w_3$$

$v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ $\quad v = x e_1 + y e_2 + z e_3$

$$f(v) = x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3) =$$
$$= x(2t_1 + t_2) + y(t_1 - t_2) + z t_2 = (2x + y, x - y + z)$$

$$\boxed{f(x, y, z) = (2x + y, x - y + z)}$$

Teorema Sia $f : V \to W$ lineare. Allora f è:

1) $\boxed{\text{iniettiva}}$ $\iff$ f manda una base di V in un insieme linearmente indipendente in W

2) suriettiva $\iff$ f manda una base di V in un insieme di generatori di W

3) biiettiva (isomorfismo) $\iff$ f manda una base di V in una base di W.

Dim (1) Sia $\{v_i\}_{i \in I}$ base di V

($\Rightarrow$) Mostriamo che $\{f(v_i)\}_{i \in I}$ sono lin. indip.

$$\longrightarrow \sum_{i \in I} \lambda_i f(v_i) = 0_W \Rightarrow f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i v_i\right) = 0_W \Rightarrow \sum_{i \in I} \lambda_i v_i \in \ker f = \{0\}$$

con al più un numero finito di $\lambda_i \neq 0$

$$\Longrightarrow \sum_{i\in I} \lambda_i v_i = 0_V \quad \Longrightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i \in I.$$

$(\Leftarrow)$ Supponiamo $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ lin. indip.

Sia $v \in \operatorname{Ker} f \subset V \Longrightarrow v = \sum_{i\in I} \lambda_i v_i$ ($\lambda_i \neq 0$ per un # finito di $i \in I$)

$$0_W = f(v) = f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(v_i) \Longrightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i \in I$$

$$\Longrightarrow v = 0_V$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Ker} f = 0 \quad \Longrightarrow f \text{ iniettiva}$$

2) Se $\{v_i\}_{i\in I}$ base di V $\Longrightarrow$ $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ generano $\operatorname{Im} f \subset W$

Infatti, preso $w \in \operatorname{Im} f$ $\Longrightarrow$ $\exists\, v \in V$ t.c. $f(v) = w$

$$v = \sum_{i\in I} \lambda_i v_i$$

$$w = f(v) = f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(v_i)$$

f suriettiva $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Im} f = W$ $\Longleftrightarrow$ $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ generano W

3) f biiettiva $\iff$ f iniettiva e suriettiva $\iff$ f manda una base in una base.

<u>Corollario</u> Siano V, W spazi vettoriali di dim finita. Allora

$$V \cong W \iff \dim V = \dim W.$$

isomorfo

<u>Def.</u> Due spazi vettoriali V, W sono detti <u>isomorfi</u> se $\exists\, f : V \to W$ <u>isomorfismo</u>, si scrive $\boxed{V \cong W}$

Dim del corollario

($\Rightarrow$) Se $V \cong W \Rightarrow \exists\ f: V \xrightarrow{\cong} W$

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di $V \overset{(3)}{\Longrightarrow}$

$\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ base di W

$\dim W = n = \dim V$

($\Leftarrow$) Se $\dim V = \dim W = n \Rightarrow \exists$ base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V

e $\{w_1, \dots, w_n\}$ di W

$\leadsto f: V \longrightarrow W$ lineare t.c.

$f(v_i) = w_i\ ,\ i = 1, \dots, n$

f manda base in base

$\Longrightarrow f$ isomorfismo. $\Longrightarrow V \cong W$.

Corollario. Se V $\mathbb{K}$-spazio vett. con $\dim V = n \Longrightarrow$

$$\boxed{V \cong \mathbb{K}^n}$$

Infatti $\dim \mathbb{K}^n = n$

$\mathrm{Hom}(V, W) = \{ f : V \to W \mid f \text{ lineare} \}$

$f, g \in \mathrm{Hom}(V, W) \rightsquigarrow$

$f + g \in \mathrm{Hom}(V, W)$

$\lambda f, \ \lambda \in \mathbb{K}$

$f : V \to W$ lineare e biiettiva $\Longrightarrow f^{-1} : W \longrightarrow V$ lineare.

$\mathrm{Hom}(V, V) =: \mathrm{End}(V)$ spazio vett. su $\mathbb{K}$.

endomorfismo

$\mathrm{Aut}(V) = \{ f : V \longrightarrow V \mid f \text{ isomorfismo} \} \subset \mathrm{End}(V)$

automorfismo

spazi vett.

non è uno spazio vett. (se $\dim V \geq 1$)

$0 : V \longrightarrow V$

$v \mapsto 0_V \quad \forall v \in V$

$0 \notin \mathrm{Aut}\, V$ se $\dim V \geq 1$

non suriettiva

Siano V, W di dim finita $\quad n = \dim V \in \mathbb{N}$

$\quad m = \dim W \in \mathbb{N}$

$B = (v_1, \dots, v_n)$ base di V, $\quad C = (w_1, \dots, w_m)$ base di W.

$f : \underline{\underline{V}} \longrightarrow \underline{W}$ lineare $\quad (f \in \mathrm{Hom}(V, W))$

$$W \ni f(\underline{v_1}) = \boxed{a_{11} w_1 + \dots + a_{m1} w_m} \quad \text{1 col}$$

$$f(v_2) = \boxed{a_{12} w_1 + \dots + a_{m2} w_m} \quad \text{2 col}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f(\underline{v_n}) = \boxed{a_{1n} w_1 + \dots + a_{mn} w_m} \quad \text{n-esima col}$$

$a_{ij} \in K$

$$A = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right)$$

matrice $\underline{m} \times \underline{\underline{n}}$

A è detta matrice di f rispetto alle basi B e C.