26 ottobre.

Applicazione del Teorema sui limiti di funzioni crescenti

Esempio Dimostriamo che per $b > 1$ si ha $\lim_{x \to +\infty} b^x = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} b^x = 0$.

Qui diamo per scontato che $x \mapsto b^x$ è crescente. Allora

$$\lim_{x \to +\infty} b^x = \sup\{ b^x : x \in \mathbb{R} \}$$

Osserviamo che

$$\{ b^x : x \in \mathbb{R} \} \supseteq \{ b^n : n \in \mathbb{N} \}$$

$$\Rightarrow \sup\{ b^x : x \in \mathbb{R} \} \geq \sup\{ b^n : n \in \mathbb{N} \}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} b^n = +\infty$$

Concludiamo

$$+\infty = \sup\{b^x : x \in \mathbb{R}\} = \lim_{x\to+\infty} b^x$$

$$\lim_{x\to+\infty} b^x = +\infty \, . \checkmark$$

$$\lim_{x\to-\infty} b^x = \lim_{y\to+\infty} b^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{b^y}$$

$$y = -x \qquad\qquad = \frac{1}{\infty} = 0 \, .$$

Ricordiamo che $X \subseteq \mathbb{R}$ allora con X' denotiamo l'insieme dei punti di accumulazione di X.

Vediamo qualche esempio

1) Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ con un numero finito di elementi.

Allora $X' = \emptyset$

<u>Dim</u> Sia $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Supponiamo per assurdo che $\bar{x} \in X'$.

<u>Caso 1</u> $\bar{x} \notin X$. Allora $|\bar{x} - x_j| > 0$ $\forall\, x_j \in X$.

Consideriamo ora

$$\min\{|\bar{x} - x_1|, \dots, |\bar{x} - x_n|\} =$$

$$= |\bar{x} - x_{j_0}| > 0$$

Sia ora $0 < \varepsilon_0 < |\bar{x} - x_{j_0}|$

Allora abbiamo dimostrato che $\exists\, \varepsilon_0$ t.c. non esiste alcun elemento x_j di X t.c. $0 < |\bar{x} - x_j| < \varepsilon_0$

Conclusione: $\bar{x} \notin X'$ perchè è falsa la proposizione

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in X \quad \text{t.c.}$$

$$0 < |\bar{x} - x| < \varepsilon.$$

2) Sia $\bar{x} \in X$. Allora $\bar{x} = x_{k_0}$. Ora consideriamo le distanze $|x_{k_0} - x_j| > 0$ per $j \neq k_0$.

~~Considero~~

$$0 < \min\{|x_{k_0} - x_j| : j \neq k_0\} = |x_{k_0} - x_{j_0}|$$

Sia $0 < \varepsilon_0 < |x_{k_0} - x_{j_0}|$

Allora abbiamo che

$\forall x_j \in X$ con $x_j \neq x_{k_0}$ ho

$$|x_{k_0} - x_j| > \varepsilon_0$$

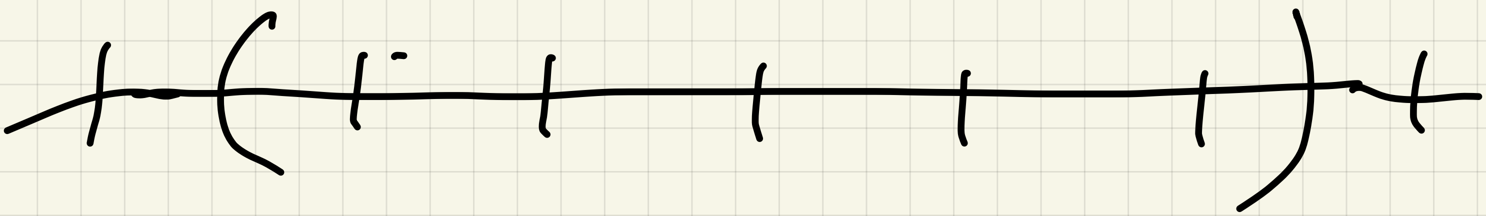
Quindi di nuovo $x_{k_0} \notin X'$

perchè è falsa la prop

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_j \in X$ t.c.

$$0 < |x_{k_0} - x_j| < \varepsilon .$$

Es. $\mathbb{Z}' = \emptyset$, $\mathbb{N}' = \emptyset$



<u>Esercizio 1</u> Verificare che se $X \subset Y \subseteq \mathbb{R}$ allora

$$X' \subseteq Y'$$

Esercizio 2 Verificare che se

$X \subseteq \mathbb{R}$ localmente finito, cioè se

$\forall$ (a,b) intervallo limitato allora

$X \cap (a,b)$ ha un numero finito

di elementi,

si ha $X' = \emptyset$

Verifichiamo che $\mathbb{Z}' = \emptyset$.

Sia per assurdo $\bar{x} \in \mathbb{Z}'$.

1) se $\bar{x} \notin \mathbb{Z}$ allora risulta

$$[\bar{x}] < \bar{x} < [\bar{x}] + 1$$

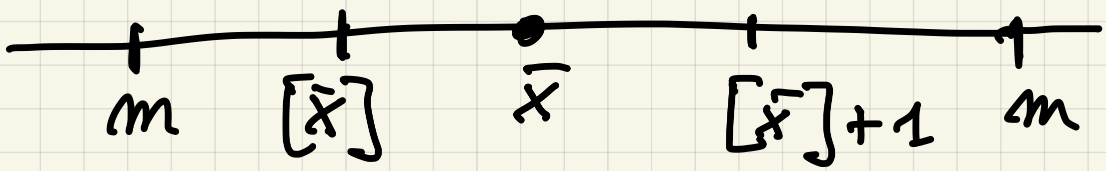
e ogni $m \in \mathbb{Z}$ è o

$\bar{m} \geq [\bar{x}] + 1$ oppure

$\bar{m} \leq [\bar{x}]$

Questo implica che $\forall\, m \in \mathbb{Z}$

$$|m - \bar{x}| \geq \min\{|\bar{x} - [\bar{x}]|, |\bar{x} - ([\bar{x}]+1)|\}$$
$$> 0$$



Se $\quad 0 < \varepsilon_0 < \min\{|\bar{x} - [\bar{x}]|, |\bar{x} - ([\bar{x}]+1)|\}$

allora $\quad |m - \bar{x}| > \varepsilon_0 \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \quad \bar{x} \notin \mathbb{Z}'$.

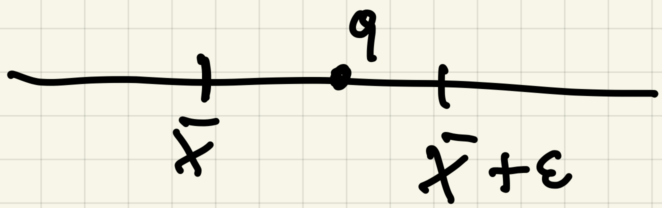
2) Dimostrare che se $\bar{x} \in \mathbb{Z}$ non può essere $\bar{x} \in \mathbb{Z}'$.

Esempio $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$

Infatti sia $\bar{x} \in \mathbb{R}$ e sia $\varepsilon > 0$.

Allora sappiamo che $\exists\, q \in \mathbb{Q}$

$$\bar{x} < q < \bar{x} + \varepsilon$$



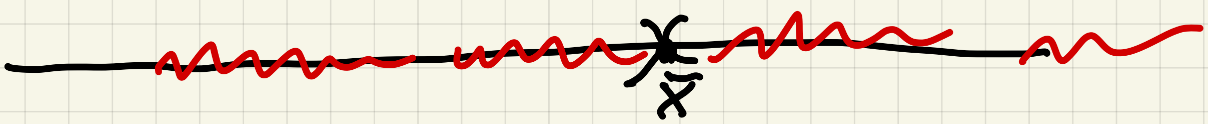
Conclusione: $\bar{x}$ È vero che

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, q \in \mathbb{Q}$ t.c.

$$0 < |\bar{x} - q| < \varepsilon .$$

Esercizi Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$.
Allora $\bar{x} \in X'$ se e solo se $\bar{x}$ è un punto di accumulazione di almeno uno di questi due insiemi:

$$X \cap (-\infty, \bar{x})$$
$$X \cap (\bar{x}, +\infty).$$



Esercizio $\bar{x} \in X'$ se e solo se esiste una successione di X strettamente monotona il cui limite è $\bar{x}$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

1) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \exists M^1_\varepsilon$ t.c.

$$x > M^1_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Sia $E \subseteq \mathbb{R}_+$ con $\inf E = 0$

2) $\forall \varepsilon \in E \ \exists M^2_\varepsilon$ t.c.

$$x > M^2_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

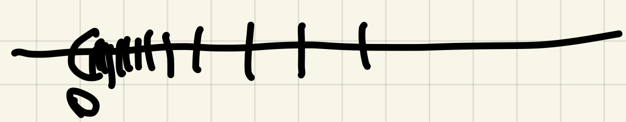
$1 \Leftrightarrow 2$

<u>Dim</u> Assumo 1) e verifico che 2) e' vero.

Ricordiamoci che 1 dice

$* \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \exists M^1_\varepsilon$ t.c. $x > M^1_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Sia ora $\varepsilon \in E$



$\Rightarrow \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ quindi se scelgo

$M^2_\varepsilon = M^1_\varepsilon$ ~~ho~~

$\forall \varepsilon \in E \ \exists M^2_\varepsilon$ t.c. $x > M^2_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

2) Dimostriamo che

(2) $\forall \varepsilon \in E \ \exists M^2_\varepsilon$ t.c. $x > M^2_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

implica

$\varepsilon > 0 \Leftrightarrow \varepsilon \in \mathbb{R}_+$

(1) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists M^1_\varepsilon$ t.c. $x > M^1_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Sia $\varepsilon > 0$. Allora esiste un $\varepsilon' \in E$ con $0 < \varepsilon' < \varepsilon$.

so che $\exists M^2_{\varepsilon'}$ t.c.

$$x > M^2_{\varepsilon'} \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon' < \varepsilon$$

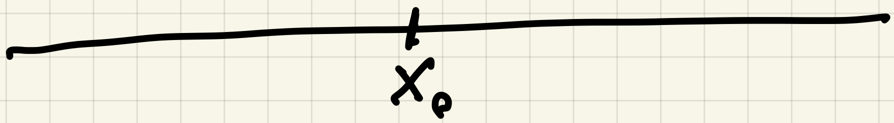
Scegliamo allora $M^1_\varepsilon = M^2_{\varepsilon'}$. Allora

$$x > M^1_\varepsilon = M^2_{\varepsilon'} \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Abbiamo dimostrato la proposizione 1.

Def (di $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ con $L \in \mathbb{R}$)

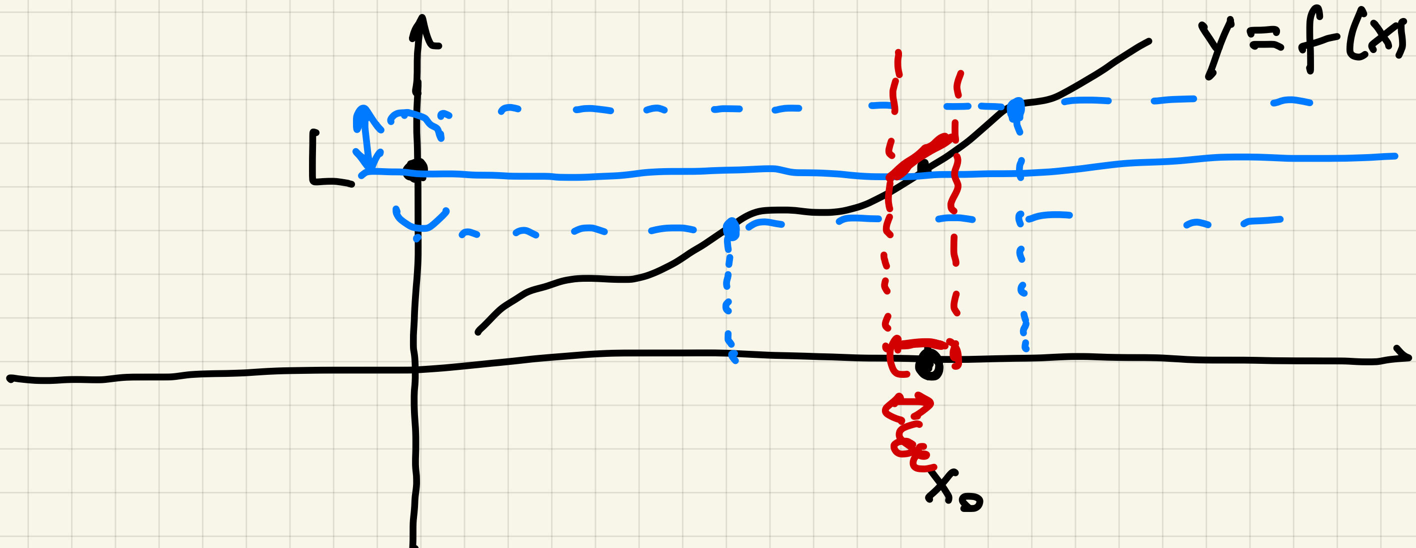
Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X'$, sia $f: X \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ e sia $L \in \mathbb{R}$.



Scriviamo $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ se

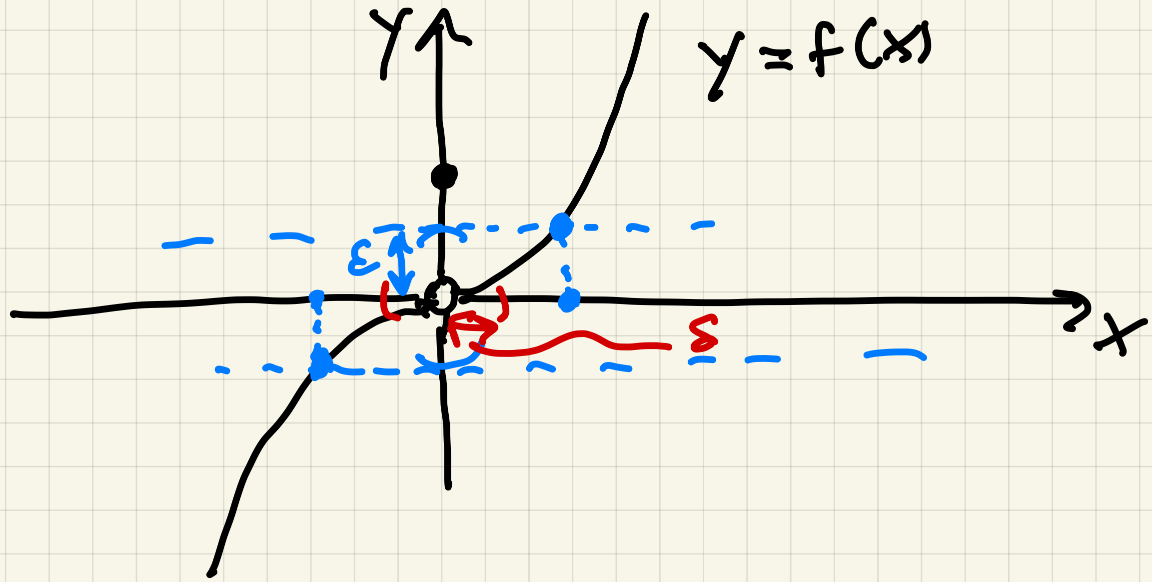
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c.

$0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ e $x \in X \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$



Nel disegno, se $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Es. se $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$



$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

$$|x^3| = |x|^3 < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \varepsilon^{\frac{1}{3}}$$

Se pongo $\delta_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{1}{3}}$ ottengo che

$$0 < |x| < \delta_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{1}{3}} \Rightarrow |f(x)| = |x^3| =$$
$$= |x|^3 < \delta_\varepsilon^3 = \left(\varepsilon^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \varepsilon$$

Cioè abbiamo dimostrato che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } 0 < |x| < \delta_\varepsilon$$
$$\Longrightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

__Def__ Sia $f: X \to \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in X$ e sia $x_0 \in X'$. Allora diciamo che $f(x)$ è continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Nei punti $x_0 \in X$ che non sono punti di accumulazione di X diremo che f è continua.

f si dice continua di X a valori in $\mathbb{R}$ se è continua in tutti i punti di X.

__Esercizio__ Sia $f: X \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X$. Dimostrare che f è continua in x_0 se e solo se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \, \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.}$$