Movimento libero dello stato di sistemi LTI a tempo discreto

Utilizzo della Z-trasformata e della forma di Jordan

Sistemi Dinamici

a.a. 2020/21

$\boxed{Es}$ Dato il sistema LTI a tempo discreto, di ordine 3, descritto da

$$\begin{cases} x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) = C\,x(k) \end{cases}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

e stato iniziale $\quad x(0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

determinare il movimento libero dello stato a partire dallo stato iniziale $x(0)$ assegnato:

$$x(k) = ?$$

In particolare quanto vale $x(3)$?

$$x(3) = ?$$

Soluzione

$$x(k) = A^k x(0)$$

forma di Jordan della matrice A

utilizzo della Z-trasformata

I° modo: utilizzo della forma di Jordan

polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_{3\times 3} - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -2 & 0 \\ -1 & \lambda & 1 \\ 0 & -2 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \dots$$

$$\det\begin{bmatrix}\lambda & -2 & 0\\ -1 & \lambda & 1\\ 0 & -2 & \lambda\end{bmatrix} =$$

sviluppo secondo la 3^a riga

$$= (-1)^{3+1}\cdot 0\cdot \det\begin{bmatrix}-2 & 0\\ \lambda & 1\end{bmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+2}\cdot(-2)\cdot\det\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ -1 & +1\end{bmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+3}\cdot\lambda\cdot\det\begin{bmatrix}\lambda & -2\\ -1 & \lambda\end{bmatrix} = \dots$$

$$\det\begin{bmatrix}\lambda & -2 & 0\\ -1 & \lambda & 1\\ 0 & -2 & \lambda\end{bmatrix} = \dots = 0 + 2\lambda + \lambda(\lambda^2 - 2)$$

$$= \lambda^3$$

In definitiva

$$p_A(\lambda) = \lambda^3$$

unico autovalore $\lambda_1 = 0$

molteplicità $\mu_1 = 3$

Per determinare la forma di Jordan vanno calcolati gli indici ρ_k, μ_k, ν_k $k=1,2,3$

$$\rho_1 = \operatorname{rank}(A - \lambda_1 I_3) = \operatorname{rank} A = 2$$

$$\mu_1 = 3-2 = 1$$ ← una unica catena di autovettori generalizzati [quindi catena di lunghezza 3]

$$\nu_1 = 1-0 = 1$$

μ_1

•

$$\rho_2 = \text{rank}\,(A - \lambda_1 I_3)^2 = \text{rank}\, A^2$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \rho_2 = 1$$

$$\mu_2 = 3 - 1 = 2$$

$$\mu_1 \qquad \mu_2 - \mu_1$$

$$\nu_2 = 2 - 1 = 1$$

$$\rho_3 = \text{rank}\left(A - \lambda_1 I_{3\times3}\right)^3 = \text{rank}\left(A^3\right)$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho_3 = 0$$

$$\mu_3 = 3 - 0 = 3$$

$$\nu_3 = 3 - 2 = 1$$

μ_1 $\quad \mu_2 - \mu_1$ $\quad \mu_3 - \mu_2$

per la matrice T serve una catena di lunghezza 3

NB ovviamente l'ordine di λ_1 è $g = 3$

$$\ker A = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\ker A^2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\ker A^3 = \mathbb{R}^3$$

per generare la catena

$$\bar{v} : \begin{cases} A^3 \bar{v} = 0 \\ A^2 \bar{v} \neq 0 \end{cases} \qquad \bar{v} \in \mathbb{R}^3$$

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad A^3 \bar{v} = 0$$

ovviamente $A^3 \equiv O_{3\times 3}$

$$A^2 \bar{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \neq 0$$

ok!

la catena allora è

$$v^{(1)} = A v^{(2)} \leftarrow v^{(2)} = A\bar{v} \leftarrow v^{(3)} = \bar{v}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La matrice di trasformazione è:

$$T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = -\frac{1}{16}\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -8 & 0 \\ -8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

e la forma di Jordan è

$$J_A = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A questo punto

$$A^k = T\, J_A^k\, T^{-1} \qquad k \geq 0$$

$$= T \cdot \left(0 \cdot I_{3\times 3} + N_3\right)^k \cdot T^{-1}$$

$$= T \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \cdot T^{-1}$$

Analizzo al variare di k

$k=0$ $\quad J_A^{\,0} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

non è la matrice nulla

$k=1$ $\quad J_A^{\,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ovviamente

$k=2$ $$J_A^{2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$k=3$ $$J_A^{3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In definitiva: $J_A^k \equiv 0$ per $k \geq 3$

matrice nulla

Ora per A^k:

$k=0$ $\quad A^0 = I$ $\quad$ (non è la matrice nulla)

$k=1$ $\quad A^1 = A$ $\quad$ ovviamente

$k=2$

$$A^2 = T\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}T^{-1}$$

$$= \left(-\frac{1}{16}\right)\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -8 & 0 \\ -8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$k=3$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e così pure per $k>3$

Analizziamo ora elemento per elemento

$$\left[J_A^k \right]_{1,1} \begin{cases} 1 & \text{per } k=0 \\ 0 & \text{per } k=1 \\ 0 & \text{per } k=2 \\ 0 & \text{per } k\geq 3 \end{cases}$$

$$\left[J_A^k\right]_{1,1} = \delta(k)$$

In questo modo riesco a scrivere in forma compatta l'evoluzione del termine $(\ )_{1,1}$ della matrice al variare di k $(k \geq 0)$

In modo analogo:

$$\left[J_\theta^k\right]_{1,2} \Rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } k=0 \\ 1 & \text{se } k=1 \\ 0 & \text{se } k\geq 2 \end{cases}$$

$\longrightarrow \delta(k-1)$

In definitiva, risolvendo al variare di k l'evoluzione dei singoli elementi di J_A posso scrivere:

$$J_A^k = \begin{bmatrix} \delta(k) & \delta(k-1) & \delta(k-2) \\ 0 & \delta(k) & \delta(k-1) \\ 0 & 0 & \delta(k) \end{bmatrix}$$

$$k \geq 0$$

In definitiva:

$$A^k = T \cdot \begin{bmatrix} \delta(k) & \delta(k-1) & \delta(k-2) \\ 0 & \delta(k) & \delta(k-1) \\ 0 & 0 & \delta(k) \end{bmatrix} \cdot T^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\delta(k-2)+\delta(k) & 2\delta(k-1) & -2\delta(k-2) \\ \delta(k-1) & \delta(k) & -\delta(k-1) \\ 2\delta(k-2) & 2\delta(k-1) & \delta(k)-2\delta(k-2) \end{bmatrix}$$

Il movimento libero dello stato vale

$$x(k) = A^k x(0) = A^k \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha\delta(k) + 2\beta\delta(k-1) + 2(\alpha-\gamma)\delta(k-2) \\ \beta\delta(k) + (\alpha-\gamma)\delta(k-1) \\ \gamma\delta(k) + 2\beta\delta(k-1) + 2(\alpha-\gamma)\delta(k-2) \end{bmatrix}$$

In particolare

$$x(1) = \begin{bmatrix} 2\beta \\ \alpha-\gamma \\ 2\beta \end{bmatrix}$$

$$x(2) = \begin{bmatrix} 2(\alpha-\gamma) \\ 0 \\ 2(\alpha-\gamma) \end{bmatrix}$$

$$x(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$k \geq 3$

II° modo: utilità della Z-Trasformata

$$A^k \Longleftrightarrow z(zI-A)^{-1}$$

$$x(k) = A^k x(0) \Longleftrightarrow X(z) = z(zI-A)^{-1}x(0)$$

$$\left(z I_{3\times 3} - A\right) = \begin{bmatrix} z & -2 & 0 \\ -1 & z & +1 \\ 0 & -2 & z \end{bmatrix}$$

$$\left(z I_{3\times 3} - A\right)^{-1} = \frac{1}{\det\left(z I_{3\times 3} - A\right)} \cdot \left[C_{ij} \right]^T$$

$$\det\left(z I_{3\times 3} - A\right) = z^3$$

già determinato in precedenza

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} z & +1 \\ -2 & z \end{vmatrix} = (z^2+2)$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & +1 \\ 0 & z \end{vmatrix} = +z$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & z \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = +2$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & z \end{vmatrix} = +2z$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{vmatrix} = +z^2$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} z & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = +2z$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ z & +1 \end{vmatrix} = -2$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} z & 0 \\ -1 & +1 \end{vmatrix} = -z$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} z & -2 \\ -1 & z \end{vmatrix} = +(z^2-2)$$

$$\left(z I_{3\times 3} - A\right)^{-1} = \frac{1}{z^3} \begin{bmatrix} (z^2+2) & +z & +2 \\ +2z & +z^2 & +2z \\ -2 & -z & (z^2-2) \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{z^3} \begin{bmatrix} z^2+2 & +2z & -2 \\ +z & +z^2 & -z \\ +2 & +2z & z^2-2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{Z}\{A^k\} = z\left(zI_{3\times 3} - A\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{z^2}\begin{bmatrix} z^2+2 & 2z & -2 \\ z & z^2 & -z \\ 2 & 2z & z^2-2 \end{bmatrix}$$

$$= \dots$$

$$\ldots = \begin{bmatrix} 1+\frac{2}{\tau^2} & \frac{2}{\tau} & -\frac{2}{\tau^2} \\ \frac{1}{\tau} & 1 & -\frac{1}{\tau} \\ \frac{2}{\tau^2} & \frac{2}{\tau} & 1-\frac{2}{\tau^2} \end{bmatrix}$$

$$X(z) = z\left(zI_{3\times3} - A\right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(1+\frac{2}{z^2}\right)\alpha + \frac{2}{z}\beta - \frac{2}{z^2}\gamma \\ \frac{1}{z}\alpha + \beta - \frac{1}{z}\gamma \\ \frac{2}{z^2}\alpha + \frac{2}{z}\beta + \left(1-\frac{2}{z^2}\right)\gamma \end{bmatrix}$$

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} \alpha \cdot \{\delta(k) + 2\delta(k-2)\} + 2\beta \cdot \delta(k-1) - 2\gamma \cdot \delta(k-2) \\ \alpha \cdot \delta(k-1) + \beta \cdot \delta(k) - \gamma \cdot \delta(k-1) \\ 2\alpha \cdot \delta(k-2) + 2\beta \cdot \delta(k-1) + \gamma \cdot \{\delta(k) - 2\delta(k-2)\} \end{bmatrix}$$

In particolare

$$x(0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \qquad x(1) = \begin{bmatrix} 2\beta \\ \alpha - \gamma \\ 2\beta \end{bmatrix}$$

$$x(2) = \begin{bmatrix} 2\alpha - 2\gamma \\ 0 \\ 2\alpha - 2\gamma \end{bmatrix} \qquad x(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad k \geq 3$$

E se volessi mettere in evidenza i modi di risposta?

$$A^k = T \, J_A^k \, T^{-1} \qquad k \geq 0$$

Posso scrivere

$$J_A^k = \left(\bar{\lambda} I + N_3\right)^k \quad ?$$

In realtà, dato che $\bar{\delta} = 0$ NON posso usare quella notazione!

Allora quali sono i modi di risposta? Come li esplicito?

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = ?$$

Riporto da :

$$z\left(zI-J_A\right)^{-1} = z\sum_{i=1}^{1}\sum_{\ell=0}^{m_i-1} \ell!\, A_{i\ell}\left(z-\lambda_i\right)^{-(\ell+1)}$$

unico autovalore

$\lambda_1 = 0 \quad m_1 = 3$

$$z\left(zI-J_A\right)^{-1} = z\sum_{\ell=0}^{2} \ell!\, A_{1\ell}\, z^{-(\ell+1)}$$

$$z\left(zI - \tilde{J}_A\right)^{-1} = z\sum_{\ell=0}^{2} \ell!\, A_{1\ell}\, z^{-(\ell+1)}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{2} \ell!\, A_{1\ell}\, z^{-\ell}$$

Antitrasformo

$$J_A^{k} = \sum_{0}^{2} {}_{\ell} \, A_{1\ell} \, \ell! \, \delta(k-\ell)$$

Come le trovo?

Posso applicare la formula generale per $A_{i\ell}$ che dicevamo

$$A_{1l} = \frac{1}{l!} \frac{1}{(2-l)!} \lim_{z \to 0} \left\{ \frac{d^{(2-l)}}{dz^{2-l}} \left[z^3 (z - J_A)^{-1} \right] \right\}$$

$l = 0, 1, 2$

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_{10}\,\delta(k)$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_{11}\,\delta(k-1)$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad A_{12}\,\delta(k-2)$$