Stabilità

Applicazione della trasformazione bilineare e del criterio di Routh-Hurwitz (richiami da "Fond. di Automatica")

Sistemi Dinamici

a.a. 2020/21

Es. Studiare la stabilità interna del sistema LTI

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

polinomio caratteristico

$$p_A(z) = \det(zI - A) = z^3 - 5z^2 + 2z + 5$$

$p_A(z) = z^3 - 5z^2 + 2z + 5$ ← NON banale da fattorizzare (ricerca di radici del polinomio per via numerica con la tecnica di bisezione per es.)

Allora non è conveniente utilizzare

- analisi degli autovalori della matrice A
- forma di Jordan della matrice A

È conveniente invece far uso della trasformazione Z lineare per analizzare il polinomio caratteristico

1B Nel corso vedremo un ulteriore approccio utile a stabilire se il sistema LTI è stabile o meno → applichiamo il Teorema di Lyapunov per i sistemi dinamici lineari [prossimamente!]

$\boxed{\text{Richiami}}$

$$z = \frac{w+1}{w-1} \qquad p(z) \longrightarrow q(w)$$

Per sostituzione nell'equazione $p(z)=0$

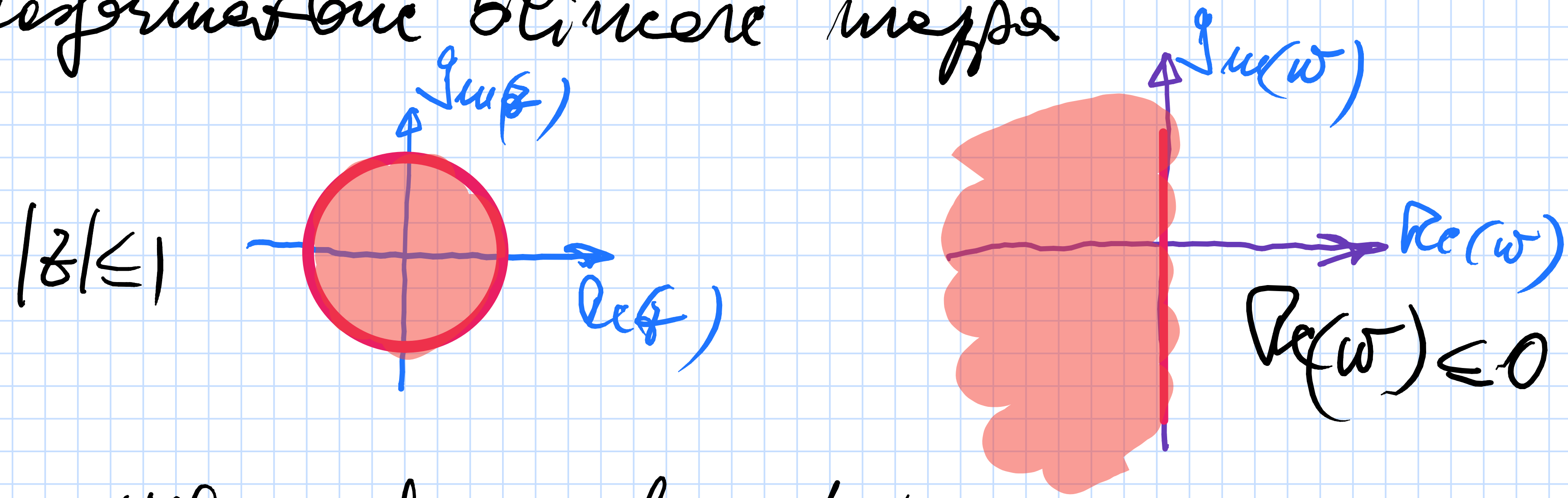
$$z^3 - 5z^2 + 2z + 5 = 0$$

$$z = \frac{w+1}{w-1} \Longrightarrow \left(\frac{w+1}{w-1}\right)^3 - 5\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 + 2\left(\frac{w+1}{w-1}\right) + 5 = 0$$

moltiplicando per $(w-1)^3$ e riordinando i vari termini si ottiene l'equazione $q(w)=0$

$$3w^3 - 19w^2 + 21w + 3 = 0$$

La trasformazione bilineare mappa



Ora è possibile analizzare le radici di $q(w)$ [distinguendo tra radici con $\mathrm{Re}(w)<0$ e radici con $\mathrm{Re}(w)\geq 0$] per poi discutere delle radici del polinomio originario $p(z)$

Tabella di Routh-Hurwitz per $q(\omega)$

$$q(\omega) = 3\omega^2 - 19\omega^2 + 21\omega + 3$$

$$\begin{array}{cc|cc}
+ & 3 & 3 & 21 \\
- & 2 & -19 & 3 \\
+ & 1 & \frac{408}{19} & \\
+ & 0 & 3 &
\end{array}$$

$$\frac{(-19)\cdot 21 - 9}{-19}$$

2 variazioni di segno

$\Downarrow$

2 radici di $q(\omega)$ hanno $\mathrm{Re}(\omega) > 0$

In definitiva

2 radici di $p(z)$ con modulo maggiore di 1

$\Downarrow$

Il sistema è instabile

$f(z) = 0 \longleftarrow$ stima numerica delle radici

$$z_1 \simeq -0{,}77$$

$$z_2 \simeq +1{,}52$$

$$z_3 \simeq +4{,}25$$

Stabilità

Criteri basati sugli autovalori
Richiami da
"Fondamenti di Automatica"

Sistemi Dinamici

a.a. 2020/21

Es Determinare gli stati d'equilibrio del sistema LTI in evoluzione libera

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = -x_1(k) \end{cases}$$

Per l'esistenza di stati d'equilibrio deve ammettere soluzione il sistema

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_2 \\ \bar{x}_2 = -\bar{x}_1 \end{cases}$$

unica soluzione

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lo stato di equilibrio trovato è stato stabile, as. stabile, instabile?

Il sistema LTI studiato è stabile, as. stabile oppure instabile?

1° test: autovalori della matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ +1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2} = \pm j & \text{autovalori} \\ |\lambda_{1,2}| = 1 & \text{semplici} \end{cases}$$

stato d'equilibrio → semplicemente
sistema LTI ↗ stabile

Quale è la forma di Jordan della matrice A?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

$$\lambda_1 = -j \qquad \Lambda_A = \{-j, +j\}$$

$$\lambda_2 = +j$$

→ sono complessi coniugati. Anche gli autovettori!

→ sono 2 autovalori distinti!

⇓

La matrice è diagonalizzabile!

$$\ker\left(A - \lambda_1 I\right) = \ker\begin{bmatrix} +j & 1 \\ -1 & +j \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} j v_1 + v_2 = 0 \\ -v_1 + j v_2 = 0 \end{cases}$$

$$v_2 = -j v_1$$

$$v_1 = j v_2 \quad / \cdot (-j)$$

$$-j v_1 = v_2$$

$$\ker\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} -j \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\ker(A - \lambda_2 I) = \left\langle \begin{bmatrix} -j \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$T = \begin{bmatrix} +j & -j \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det T = 2j$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}5j & 0{,}5 \\ +0{,}5j & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$J_A = \begin{bmatrix} -j & 0 \\ 0 & +j \end{bmatrix}$$