Esercizio 2

Si consideri il seguente **sistema dinamico a tempo discreto** descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} x(k+1) & = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ \\ y(k) & = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

Domanda 2.1

Verificare che il sistema è **asintoticamente stabile**.

prova del 13/9/19

Domanda 2.2

Un sistema LTI a tempo discreto viene detto *contrattivo* se vale che

$$\|x(k)\| \leq \|A\|^k \|x(0)\|, \quad k = 0, 1, 2 \cdots \quad \forall x(0) \in X$$

con X spazio di stato.
Verificare che il sistema definito nell'esercizio 2 **non è** contrattivo. Motivare la risposta.

Senza scomodare norme di matrici, basta calcolare $x(k)$: $x(k) = A^k x(0)$

La matrice A è in forma di Jordan, quindi

$$A^k = \begin{bmatrix} (0{,}5)^k & k(0{,}5)^{k-1} \\ 0 & (0{,}5)^k \end{bmatrix}$$

Suppongo $x(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$

quindi

$$x(k) = \begin{bmatrix} (0,5)^k & k(0,5)^{k-1} \\ 0 & (0,5)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a\cdot(0,5)^k + k(0,5)^{k-1}\cdot b \\ b\cdot(0,5)^k \end{bmatrix}$$

$$= (0,5)^k \begin{bmatrix} a + 2kb \\ b \end{bmatrix}$$

Ora se $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ si ottiene:

$$x(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \begin{bmatrix} 2k \\ 1 \end{bmatrix}$$

cioè: $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad x(1) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$x(2) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad x(3) = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ .....

ed utilizzando la $\|\cdot\|_2$

$$\|x(0)\|_2 = \sqrt{0^2+1^2} = 1$$

$$\|x(1)\|_2 = \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \simeq 1,118$$

$$\|x(2)\|_2 = \sqrt{1+\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{4} \simeq 1,031$$

$$\|x(3)\|_2 = \sqrt{\left(\frac{6}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{37}}{8} \simeq 0,760$$

Come si nota:

$$\|x(3)\|_2 < \|x(0)\|_2 < \|x(2)\|_2 < \|x(3)\|_2$$

La relazione da confutare è:

$$\|x(k)\| \leq (\underbrace{\|A\|}_{\text{è un n° reale} \geq 0,\ \mu_A})^k \cdot \underbrace{\|x(0)\|}_{\text{n° reale} \geq 0,\ \bar{x}_0} \qquad (*)$$

$$\left(x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \|x(0)\| = 0 \right)$$

Non resta che analizzare la relazione $(*)$ al variare di μ_A

$0 \leq \mu_A < 1$ $\quad (\mu_A)^k \bar{x}_0 \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

sequenza monotona decrescente

$\mu_A = 1$ $\quad (\mu_A)^k \bar{x}_0 = \bar{x}_0$

sequenza costante

in questi 2 casi c'è contrattività, nel 3° no

$\mu_A > 1$ $\quad (\mu_A)^k \bar{x}_0 \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$

sequenza monotona divergente

la sequenza $\|x(0)\|_2, \|x(1)\|_2, \|x(2)\|_2, \|x(3)\|_2$ calcolata per il particolare $x(0)$ scelto non è costante e nemmeno monotona decrescente, quindi il sistema è non contrattivo