30 ottobre

Lunedì 2 lezione in remoto.

Lemma Sia $b > 0$. Allora $b^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ è continua in $\mathbb{R}$.

Dim Per prima cosa dimostriamo

$$\lim_{x \to 0} b^x = b^0 = 1.$$

Quest'ultimo limite è equivalente al dimostrare che

$$\lim_{x \to 0^+} b^x = 1 \quad e \quad \lim_{x \to 0^-} b^x = 1.$$

Partiamo con $\lim_{x \to 0^+} b^x = 1$

Partiamo con $\lim_{x \to 0^+} b^x = 1$.

Supponiamo che b^x è crescente nella x e che $b^x > 1 \ \forall x > 0$

Allora $1 \leq \lim_{x \to 0^+} b^x = \inf\{ b^x : x > 0 \} \leq$

$\leq \inf\{ b^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N} \} = 1$

$n \longrightarrow b^{\frac{1}{n}}$ è una funzione decrescente

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \cdots > \frac{1}{n}$$

$$1 = \lim_{n \to +\infty} b^{\frac{1}{n}} = \inf\{ b^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N} \}$$

$$1 \leq \lim_{x \to 0^+} b^x \leq 1 \implies \lim_{x \to 0^+} b^x = 1 = b^0$$

$$\lim_{x \to 0^-} b^x = \lim_{y \to 0^+} b^{-y} = \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{b^y} =$$

$y = -x$ $$= \frac{1}{\lim_{y \to 0^+} b^y} = \frac{1}{1} = 1$$

<u>Conclusione</u> b^x è continua in 0.

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, vogliamo dimostrare

$$\lim_{x\to x_0} b^x = b^{x_0}$$

$$\lim_{x\to x_0} b^x = \lim_{h\to 0} b^{x_0+h} = \lim_{h\to 0} b^{x_0} b^h =$$

$$x = x_0 + h \qquad = b^{x_0} \lim_{h\to 0} b^h = b^{x_0}\cdot 1$$

$$= b^{x_0}$$

<u>Def</u> Sia $\{x_n\}$ una successione di punti di un insieme X, cioè una

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow X$$
$$n \longrightarrow x_n$$

Una sottosuccessione di $\{x_n\}$ è ottenuta considerando una mappa $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente e considerando poi

$$f \circ g : \mathbb{N} \longrightarrow X$$

$$\mathbb{N} \longrightarrow X$$
$$f : n \longrightarrow x_n$$

$$g : \underset{\underset{\mathbb{N}}{\uparrow}}{k} \longrightarrow \underset{\underset{\mathbb{N}}{\uparrow}}{n_k}$$

$\{n_k\}$ successione strettamente crescente di numeri naturali

La sottosuccessione di $\{x_n\}$ corrispondente è data da $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$

Esempi $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$

$\{(-1)^{2k}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{(-1)^{2n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1\}$ è una sottosuccessione

$\{(-1)^{2k+1}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{(-1)^{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{-1\}$

Teor (Bolzano Weierstrass)

Sia $\{x_n\}$ una successione contenuta in un intervallo $[a,b]$ dove $a,b\in\mathbb{R}$. Allora esiste $\bar{x}\in[a,b]$ ed una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ t.c. $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \bar{x}$.

Esempio $\{(-1)^n\}$ è contenuta in $[-2,2]$

$\{(-1)^{2n}\}=\{1\}$
$\{(-1)^{2n+1}\}=\{-1\}$ sono sottosuccessioni convergenti.

Esercizio Se $\{n_k\}$ è strettamente crescente in $\mathbb{N}$ allora $n_k \geq k \ \forall k$.

Esercizio Sia $\{x_n\}$ una successione in $\mathbb{N}$. Dimostrare che esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ e un $L\in\overline{\mathbb{R}}$ t.c. $L=\lim_{k\to\infty} x_{n_k}$

<u>Def</u> Una successione di intervalli $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ è formata da intervalli dimezzati se

$$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \quad \forall\, n$$

e se
$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} \quad \forall\, n.$$

<u>Lemma</u> Sia $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di intervalli dimezzati. Allora esiste ed unico un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ t.c. $\bar{x} \in [a_n, b_n]\ \forall n$.
e si ha
$$\bar{x} = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n .$$

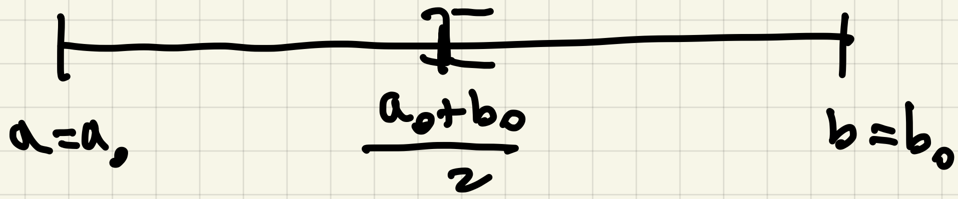
Dimostriamo B-W.

Partiamo dalla successione $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$

Definiremo una opportuna successione di intervalli dimezzati $\{[a_k, b_k]\}_{k=0,\dots,\infty}$.

1) $[a_0, b_0] = [a, b]$

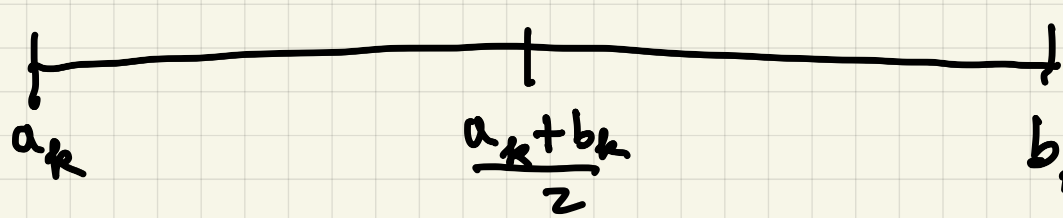
2)



Seleziono come $[a_1, b_1]$ una delle due metà che contengo infiniti x_n

3) Supponendo per induzione di avere definito una famiglia finita di intervalli dimezzati $[a_0, b_0], \dots, [a_k, b_k]$, ognuno dei quali contiene infiniti elementi della successione $\{x_n\}$,

definisco $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ come segue



Scegliamo come $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ una delle metà che abbia infiniti elementi della successione $\{x_n\}$.

Resta definita per induzione una successione di intervalli dimezzati $\{[a_k, b_k]\}_{k=0,\dots}$ con la proprietà che $[a_k, b_k]$ contiene infiniti elementi della successione $\{x_n\}$.

Ora definiremo una una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ con la proprietà che $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$.

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \qquad \forall k = 0, \dots$$

Il precedente lemma garantisce

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = \bar{x} \in [a_k, b_k] \;\forall k$$

$$\subseteq [a, b]$$

Per i carabinieri $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \bar{x}$.

Dimostro l'esistenza della sottosuccessione

$\{x_{n_k}\}$ t.c. $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Dimostriamo per induzione l'esistenza di $\{x_{n_k}\}$

0) Scegliamo un $x_{n_0} \in [a_0, b_0] = [a, b]$

1) Supponiamo che per un k
abbiamo scelto
$x_{n_0} \in [a_0, b_0], \ldots, x_{n_k} \in [a_k, b_k]$

dove $n_0 < \cdots < n_k$.

Consideriamo $[a_{k+1}, b_{k+1}]$.
Siccome $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ contiene infiniti elementi della successione, esiste un x_n $\in [a_{k+1}, b_{k+1}]$ con $n > n_k$.

Poniamo $x_{n_{k+1}} = x_n \quad (n_{k+1} = n)$

Per induzione resta definita una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ con $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \quad \forall k = 0, \ldots$

Def Per ogni $X \subseteq \mathbb{R}$ la chiusura di X è l'insieme

$$\overline{X} = X \cup X'.$$

Un $X \subseteq \mathbb{R}$ è chiuso se

$$X = \overline{X}.$$

Es. $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}' = \mathbb{Z}$

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

Def Un $X \subseteq [a,b]$ è denso in $[a,b]$ se $\overline{X} = [a,b]$

Un $X \subseteq \mathbb{R}$ è denso in $\mathbb{R}$ se

$$\overline{X} = \mathbb{R}.$$

Def $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice compatto se $X = \overline{X}$ e se X è limitato.

Es. Se X è finito allora X è compatto.