Grassi
Michele 2018/19

Psicometria 1 Lezione 2) Probabilità

Nella teoria della probabilità

- un esperimento aleatorio è una procedura ripetibile attraverso la quale viene compiuta un'osservazione;
- l'esito di un esperimento (*outcome*) è una possibile osservazione risultante da un esperimento;

lo spazio campione Ω dell'esperimento è l'insieme di tutti i possibili esiti. Ciascuna specifica realizzazione di un esperimento produce un particolare esito nello spazio campione.

- Lo spazio campione può essere discreto o continuo.
- I seguenti sono esempi di uno spazio campione discreto.

  Lancio di una moneta Lo spazio campione è $\Omega = \{T; C\}$. L'evento testa è $\{T\}$

  Lancio di due monete Lo spazio campione è $\{TT; TC; CT; CC\}$. L'evento che consiste nell'osservare una volta l'esito testa è $\{TC; CT\}$.

  Lancio di un dado Lo spazio campione è $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. L'evento dispari è $\{1, 3, 5\}$. L'evento < 3 è $\{1, 2\}$.

- Se registriamo con uno strumento molto preciso il tempo necessario per l'apprendimento di un certo compito motorio, allora lo spazio campione dell'esperimento sarà continuo e sarà costituito dai numeri reali positivi: $\Omega = \{x : x > 0\}$.

- Un evento è un sottoinsieme dello spazio campione – ovvero, un insieme di esiti di un esperimento aleatorio.
- Un evento ha luogo se uno dei suoi elementi costituenti viene osservato.
  - Per esempio, per $\Omega = \{TT; TC; CT; CC\}$, l'evento $E = \{TT; TC\}$ testa nel primo lancio ha luogo se viene osservato l'esito TT o l'esito TC.
- Un evento si dice semplice se consiste in uno solo degli esiti possibili di un esperimento; si dice composto se consiste in un insieme di esiti possibili.
  - $E = \{TT; TC\}$ è un evento composto
  - $E = \{TT\}$ è un evento semplice.

Le probabilità sono dei numeri che vengono assegnati agli eventi in maniera coerente con i seguenti assiomi.

assioma 1 la probabilità di un evento E è un numero compreso tra 0 e 1: $0 \leq P(E) \leq 1$.

assioma 2 lo spazio campione Ω è esaustivo – quando l'esperimento è eseguito qualche esito deve venire osservato $P(\Omega) = 1$.

assioma 3 due eventi A e B sono disgiunti se non hanno alcun esito in comune – e*venti disgiunti non possono verificarsi simultaneamente*. La probabilità di osservare uno o l'altro di due eventi disgiunti è la somma delle loro separate probabilità: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. In generale, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ è un insieme di n eventi mutuamente esclusivi (...disgiunti...), allora

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Modello probabilistico di un esperimento descrizione dello spazio campione dell'esperimento e delle probabilità associate agli eventi definiti sullo spazio campione in maniera coerente con gli assiomi precedenti.

- Gli assiomi della teoria della probabilità non sono sufficientemente restrittivi da imporre un'unica attribuzione di probabilità agli eventi di uno spazio campione.
- Ciascun esperimento implica dunque infiniti modelli probabilistici diversi.

- Supponiamo che gli eventi dello spazio campione $\Omega = \{TT; TC; CT; CC\}$ siano equiprobabili:

$$P(TT) = P(CC) = P(TC) = P(CT) = .25$$

  - La probabilità dell'evento $E = \{TT; TC\}$ è $P(E) = 0.25 + 0.25 = .50$
  - Siano $A = \{CT; CC\}$ l'evento croce nel primo lancio e $B = \{TT\}$ due teste. Gli eventi A e B sono disgiunti e l'evento A o B è $\{TT; CT; CC\}$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.50 + 0.25 = 0.75$$

Nella statistica classica (e in questo corso) le probabilità sono interpretate come frequenze relative calcolate per un grande numero di ripetizioni dell'esperimento.

- Se la probabilità di un evento è 0.5, allora l'evento verrà osservato in circa metà delle ripetizioni dell'esperimento. Le frequenze relative, inoltre, si approssimano sempre di più alle probabilità al crescere del numero di ripetizioni dell'esperimento.
- L'interpretazione frequentista della probabilità fornisce una procedura empirica per stimare le probabilità: ripetere molte volte l'esperimento e calcolare la frequenza relativa con cui l'evento di interesse si è verificato.

- Gli eventi possono essere visualizzati utilizzando i diagrammi di Venn (così nominati in onore del matematico inglese del diciannovesimo secolo John Venn – anche se Leibnitz e Eulero avevano già in precedenza utilizzato rappresentazioni simili).
  - Un diagramma di Venn rappresenta lo spazio campione di un esperimento come uno spazio rettangolare.
  - Al suo interno, gli eventi definiti su questo spazio campione sono rappresentati con delle regioni chiuse.
  - In talune versioni dei diagrammi di Venn, la probabilità di un evento è proporzionale all'area della regione che lo rappresenta.

Illustrazione

Si consideri l'esperimento consistente nel lancio di due dadi

- Nel successivo diagramma di Venn viene rappresentato lo spazio campione di questo esperimento. Tale spazio campione è costituito da $6 \times 6 = 36$ eventi semplici.
- Per esempio, (23) rappresenta l'esito *2 con il primo lancio e 3 con il secondo*.
- L'evento A rappresenta l'esito per cui si osserva un 1 o un 2 nel primo lancio.
- L'evento B rappresenta l'esito per cui i due lanci producono un punteggio totale uguale a 10.
- Si noti che questi due eventi sono disgiunti (non hanno alcun esito in comune).

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

- Supponiamo che i 36 esiti possibili E_i di questo esperimento siano *equiprobabili*: $P(E_i) = 1/36$. Dunque

$$P(A) = 12/36 = 1/3.$$

$$P(B) = 3/36 = 1/12.$$

- Inoltre, dato che A e B sono disgiunti

$$P(A \cup B) = 15/36 = 5/12, \text{ovvero}$$

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{15}{36}$$

Se due eventi A e B non sono disgiunti, allora quando sommiamo le loro probabilità dobbiamo evitare che la loro parte comune $A \cap B$ venga contata due volte, quindi:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - A \cap B}$$

Illustrazione

Si considerino gli eventi definiti dal successivo diagramma di Venn.

- L'evento A rappresenta l'esito per cui si osserva un 1 o un 2 nel primo lancio. $P(A) = 12/36$
- L'evento C rappresenta l'esito per cui i due lanci producono un punteggio totale uguale a 7.
  L'evento C si verifica in 6 casi su 36 possibili e dunque $P(C) = 6/36$
- L'evento $A \cup C$ corrisponde a 16 casi su 36 e ha probabilità $\boxed{P(A \cup C) = 16/36}$.
- L'evento $A \cap C$ corrisponde a 2 casi su 36 e ha probabilità $P(A \cap C) = 2/36$.

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

In base alla regola precedente, dunque

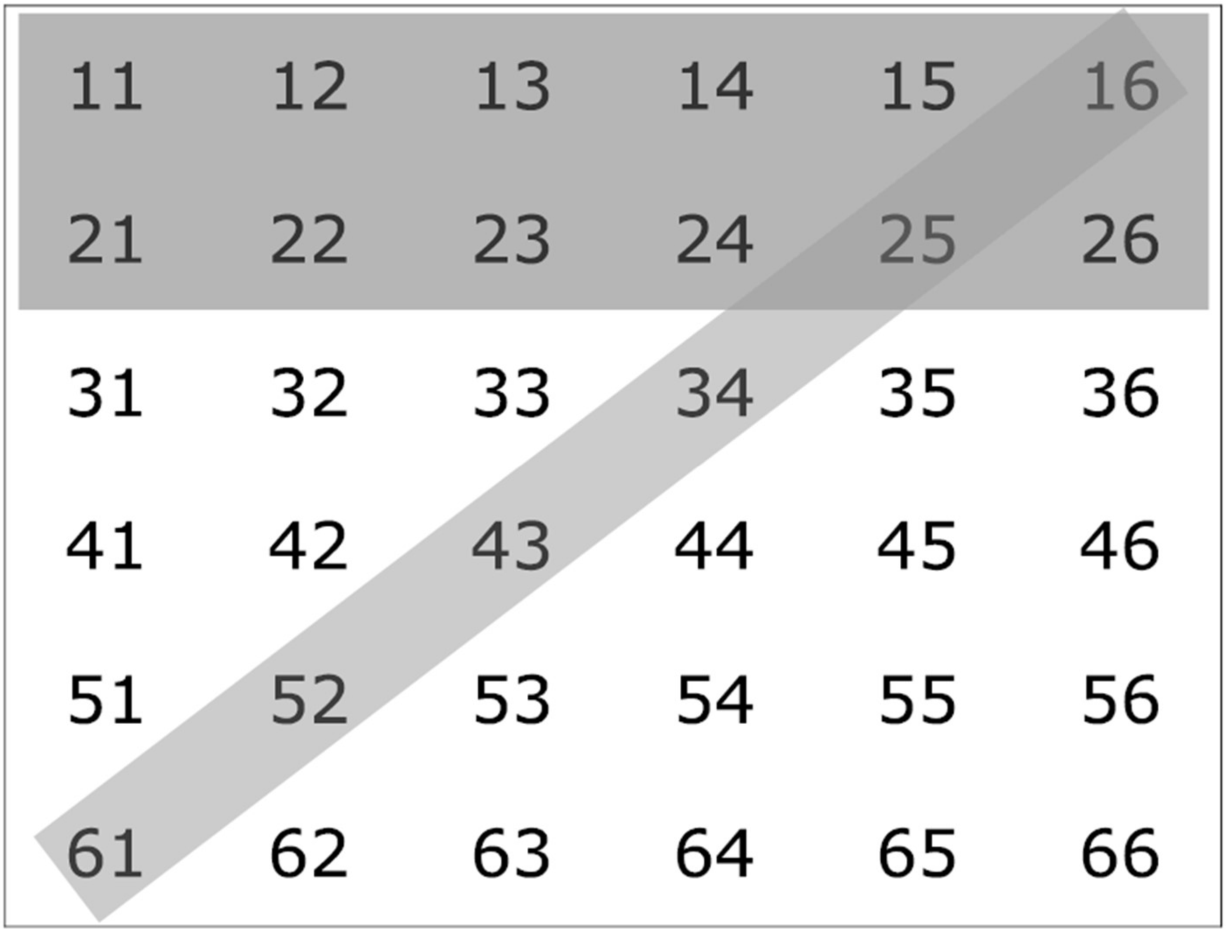
$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - A \cap B \\
&= \tfrac{12}{36} + \tfrac{6}{36} - \tfrac{2}{36} = \tfrac{16}{36}
\end{aligned}
$$

Un relazione tra eventi molto importante è quella di indipendenza tra eventi.

definizione

Due eventi sono detti indipendenti se il verificarsi di uno non altera la probabilità del verificarsi dell'altro.
Se due eventi A e B sono indipendenti, allora la probabilità che entrambi si verifichino è uguale al prodotto delle loro separate probabilità.
Se A e B sono indipendenti, allora

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$



La realazione di indipendenza è illustrata nel precedente diagramma di Venn.

- Se i 36 esiti possibili che costituiscono lo spazio campione sono equiprobabili, allora $P(A) = 12/36$, $P(C) = 6/36$ e

$$P(A \cap C) = 2/36$$

- Dato che $P(A \cap C) = P(A)P(C) = 12/36 * 6/36 = 2/6 * 1/6 = 2/36$, gli eventi A e C sono indipedenti

quindi

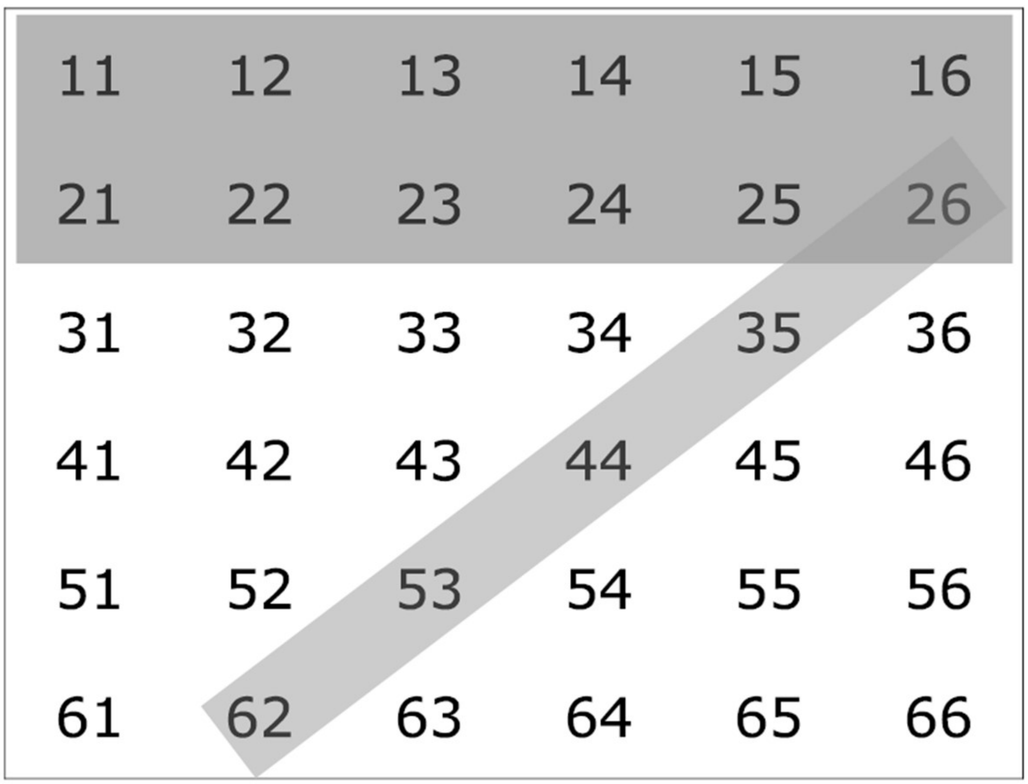
> *Il fatto di osservare 1 o 2 nel primo lancio non cambia la probabilità di ottenere un totale di 7 con entrambi i lanci.*

La relazione di dipendenza tra eventi è illustrata nel successivo diagramma di Venn.

- Gli eventi
  - A (osservare 1 o 2 nel primo lancio)
  - D (ottenere un totale di 8 nei due lanci)

  sono dipendenti o associati.
- Infatti $P(A) = 12/36 = 1/3$, $P(D) = 5/36$ e

$$P(A \cap D) = 1/36 = 3/108 \neq P(A)P(D) = 5/108$$



osservazione

La relazione di indipendenza non deve essere confusa con la relazione di disgiunzione:
se due eventi A e B sono disgiunti, allora non hanno esiti in comune e

$$P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B)$$

Gli eventi disgiunti sono dipendenti dato che il verificarsi del primo preclude la possibilità del verificarsi dell'altro.

Illustrazione

Un gruppo di studenti è costituito da 24 femmine e 26 maschi. Di questi, 12 studentesse e 18 studenti maschi giocano a tennis. Una persona viene scelta a caso da questo gruppo.

1. Qual è la probabilità che questa persona giochi a tennis?
2. Se sappiamo che la persona scelta è una studentessa, qual è la probabilità che giochi a tennis?

Risposta:

1. $(12 + 18)/(24 + 26) = 30/50 = 0,6$
2. $12/24 = 0,5$

Le probabilità calcolate conoscendo alcune informazioni, o date talune circostanze, sono dette probabilità condizionate e sono denotate da $P(A|B)$.

definizione

La probabilità condizionata $P(A|B)$ è la probabilità del verificarsi dell'evento A all'interno dello spazio campione ridotto rappresentato dall'evento B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

In generale,

per due eventi associati A e B, $P(B|A) \neq P(B)$ e $P(A|B) \neq P(A)$;

per due eventi indipendenti invece, $P(B|A) = P(B)$ e $P(A|B) = P(A)$, in altri termini, le probabilità condizionate e non condizionate sono uguali.

Riprendiamo l'esempio precedente sugli eventi

- A (osservare 1 o 2 nel primo lancio)
- D (ottenere un totale di 8 nei due lanci)

che sono tra loro dipendenti (o associati).

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Avevamo che:

$$P(A) = 12/36 = 1/3,$$

$$P(D) = 5/36,$$

$$P(A \cap D) = 1/36 \neq P(A)P(B).$$

Le probabilità condizionate di A e D sono:

$$P(A|D) = \frac{1/36}{5/36} = 1/5,$$

$$P(D|A) = \frac{1/36}{12/36} = 1/12,$$

da cui otteniamo le equivalenze

$$P(A \cap D) = P(A)P(D|A) = \frac{1}{3}\frac{1}{12} = 1/36,$$

$$P(A \cap D) = P(D)P(A|D) = \frac{5}{36}\frac{1}{5} = 1/36.$$

- Qual è la probabilità che la somma dei due lanci sia 3?

- Sapendo che il primo lancio produce 1, qual è la probabilità che la somma dei due lanci sia 3?

- **Risposta 1**: $P(E_1) \times P(E_2|E_1) = \frac{12}{36} \times \frac{2}{12} = 2/36$.

- **Risposta 2**: $1 \times P(E_2|E_1) = 1/6$.