Geometria 1 per Matematica e IADA

Foglio di esercizi 4

31 ottobre 2020

1) Dimostrare che $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come $f(x,y,z) = x+2y+z$ è lineare e suriettiva. Determinare $\operatorname{rg} f$, $\operatorname{null} f$ e una base per $\ker f$.

2) Sia $U \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale generato dal vettore $u = (1,-1,2)$. Determinare $\dim \mathbb{R}^3/U$ e una base per $\mathbb{R}^3/U$. Calcolare rispetto a tale base le componenti di $(1,0,3)+U$.

3) Dimostrare che $f:\mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$, $f(x,y) = (2x-y, x+y, y)$ è lineare e iniettiva. Determinare $\operatorname{rg} f$, $\operatorname{null} f$ e una base per $\operatorname{im} f$.

4) Dire se l'applicazione $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (3x+y, -x+2y)$ è un isomorfismo.

5) Sia $h:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f(e_1) = 2e_2 + 3e_3$, $f(e_2) = -e_1 + e_2$, $f(e_3) = -e_1 + e_3$, dove $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Si esprima $f(x,y,z)$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Calcolare $\operatorname{rg} f$ e $\operatorname{null} f$ e dire se f è un isomorfismo. Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica sia nel dominio che nel codominio.