1

Per ciascuna delle seguenti funzioni armoniche $u(x,y)$ si determini una funzione olomorfa $f(z)$ tale che $\mathrm{Re}(f(x+iy)) = u(x,y)$:

$$(\mathrm{a}):\ xy - x + y\ ,\quad (\mathrm{b}):\ \sin x \cosh y\ .$$

Soluzione 1 Risolviamo le condizioni di Cauchy-Riemann per trovare $v(x,y)$. Dalla condizione $\partial_y v = \partial_x u$ troviamo

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{a}): \partial_y v = \partial_x u = y - 1 \implies v(x,y) = \frac{y^2}{2} - y + C(x)\ ,\\
&(\mathrm{b}): \partial_y v = \partial_x u = \cos x \cosh y \implies v(x,y) = \cos x \sinh y + C(x)\ .
\end{aligned}$$

Notiamo che visto che stiamo integrando una equazione differenziale che contiene una derivata parziale rispetto a y, possiamo aggiungere alla soluzione una funzione arbitraria di x che abbiamo chiamato $C(x)$. Per determinare $C(x)$ usiamo ora la seconda condizione di Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{a}): \partial_x v = -\partial_y u \implies C'(x) = -x - 1 \implies C(x) = -\frac{x^2}{2} - x + c\ ,\\
&(\mathrm{b}): \partial_x v = -\partial_y u \implies -\sin x \sinh y + C'(x) = -\sin x \sinh y \implies C(x) = c\ .
\end{aligned}$$

Abbiamo dunque risolto per $C(x)$ in entrambi i casi, ed è rimasta solo una costante reale arbitraria c.[1] Sostituendo in $v(x,y)$ e chiamando $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ abbiamo quindi trovato la soluzione

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{a}): f(x+iy) = xy - x + y + i\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - x - y + c\right)\ ,\\
&(\mathrm{b}): f(x+iy) = \sin x \cosh y + i\left(\cos x \sinh y + c\right)\ .
\end{aligned}$$

Soluzione 2 Consideriamo il differenziale

$$P\,dx + Q\,dy := -\partial_y u\,dx + \partial_x u\,dy\ .$$

Per le condizioni di Cauchy-Riemann, la funzione $v(x,y)$ –che dà la parte immaginaria della funzione olomorfa che cerchiamo– è tale che $dv = Pdx + Qdy$. Grazie al fatto che $u(x,y)$ è una funzione armonica, vale $\partial_y P = \partial_x Q$. Pertanto per il teorema di Green l'integrale

$$\int_{\gamma(P_1 \to P_2)} P\,dx + Q\,dy$$

[1] Il fatto che in entrambi i casi la dipendenza da y si è cancellata, e siamo riusciti a trovare un'equazione per la funzione $C(x)$ che contiene la sola variabile x e che quindi possiamo risolvere, è dovuto al fatto che la funzione $u(x,y)$ da cui siamo partiti è armonica. In caso contrario, non sarebbe possibile risolvere per $v(x,y)$.

non dipende dalla curva γ ma solo dai punti iniziali e finali della curva, rispettivamente P_1 e P_2. Questo è necessario per poter identificare $Pdx + Qdy$ come dv, perchè

$$\int_{\gamma(P_1 \to P_2)} dv = v(P_2) - v(P_1) \ .$$

Scegliendo $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (x,y)$, e $\gamma(P_1 \to P_2)$ come la curva data dall'unione di un tratto orizzontale da 0 a $(x,0)$ con parametro $x' \in [0,x]$, e un tratto verticale da $(x,0)$ a (x,y) con parametro $y' \in [0,y]$, otteniamo

$$v(x,y) - v(0,0) = \int_0^x dx' \, (-\partial_y u(x',0)) + \int_0^y dy' \, \partial_x u(x,y') \ .$$

Nei due casi troviamo

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{a}) : v(x,y) = v(0,0) + \int_0^x dx'(-x'-1) + \int_0^y dy' \, (y'-1) = v(0,0) - \frac{x^2}{2} - x + \frac{y^2}{2} - y \ , \\
&(\mathrm{b}) : v(x,y) = v(0,0) + \int_0^x dx' \, 0 + \cos x \int_0^y dy' \, \cosh y' = v(0,0) + \cos x \sinh y \ .
\end{aligned}$$

Queste sono le stesse soluzioni trovate nella soluzione 1 sopra se identifichiamo $v(0,0)$ con la costante arbitraria c. In particolare danno luogo alle stesse espressioni per $f(x+iy)$.

Per entrambe le soluzioni: Se vogliamo riscrivere la soluzione per f come funzione di z, dobbiamo sostituire

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \ , \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \ ,$$

nell'espressione trovata per $f(x+iy)$. Nel caso (b) conviene anche riscrivere le funzioni trigonometriche/iperboliche in termini di esponenziali. Così facendo si trova[2]

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{a}) : f(z) = -\frac{i}{2}z^2 - (i+1)z + ic \ , \\
&(\mathrm{b}) : f(z) = \sin z + ic \ .
\end{aligned}$$

2

Calcolare l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x^2}{x^4+1} \ .$$

[2]Non è un caso che $\bar{z}$ si cancelli in entrambi i casi. Infatti le condizioni di Cauchy-Riemann si possono interpretare proprio come la condizione che la funzione dipenda solo da z e non da $\bar{z}$. Per una funzione arbitraria di due variabili, la sostituzione darebbe luogo a una funzione generica delle due variabili z e $\bar{z}$. Cambiando il segno di $v(x,y)$ nelle condizioni di Cauchy-Riemann, si ottengono delle condizioni simili che sono risolte dalle funzioni che sono solo funzioni della variabile $\bar{z}$. Tali funzioni sono dette anti-olomorfe. Le funzioni anti-olomorfe sono in corrispondenza uno-a-uno con quelle olomorfe e per questo non le studiamo separatamente, si ottengono semplicemente prendendo il complesso coniugato di funzioni olomorfe.

Soluzione: La funzione non diverge in nessun punto $x \in \mathbb{R}$ sull'asse reale e all'infinito decresce come x^{-2} dunque l'integrale converge. Vediamo la funzione come la restrizione all'asse reale della funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4+1} \ .$$

Notiamo che sul cerchio $|z| = R$ il modulo della funzione $|f(z)|$ è di ordine $\mathcal{O}(R^{-2})$ per $R \to \infty$, pertanto in particolare $\lim_{R\to\infty} R \cdot \operatorname*{Max}_{|z|=R} |f(z)| = 0$. Dunque l'integrale di $f(z)$ su un cammino semicircolare di raggio R centrato nell'origine nel semipiano superiore o inferiore va a 0 per $R \to \infty$. Inoltre la funzione $f(z)$ ha solo singolarità isolate, in particolare poli semplici (i.e. di ordine uno) alle quattro soluzioni di $z^4 + 1 = 0$, ovvero le radici quarte di -1.

Pertanto abbiamo

$$I = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_i)>0} \mathrm{Res}_f(z_i) \ , \text{oppure} \ \ I = -2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_i)<0} \mathrm{Res}_f(z_i) \ .$$

La prima uguaglianza si trova chiudendo il cammino sull'asse reale $x \in [-R, +R]$ con un arco nel semipiano superiore e applicando il teorema dei residui, oppure con un arco nel semipiano inferiore (in senso orario) applicando il teorema esterno dei residui. Viceversa la seconda uguaglianza si trova con un arco nel semipiano inferiore (in senso orario) applicando il teorema dei residui, oppure con un arco nel semipiano superiore applicando il teorema esterno dei residui.

Visto che $f(z) = f(-z)$, ovvero è una funzione pari, vale $\mathrm{Res}_f(z_i) = -\mathrm{Res}_f(-z_i)$ quindi le due somme coincidono termine per termine. Pertanto limitiamoci a usare la prima espressione e a calcolare i residui ai poli z_i con $\mathrm{Im}(z_i) > 0$. Le radici quarte di $-1 = e^{i\pi}$ sono $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$ e $z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$, di cui z_1 e z_2 hanno parte immaginaria positiva e z_3 e z_4 negativa. Notiamo che possiamo riscrivere $z^4 + 1 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$. Pertanto usando la formula per i residui a poli di ordine 1 abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_f(z_1) &= \lim_{z\to z_1} (z - z_1) f(z) = \frac{z_1^2}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} \ , \\
\mathrm{Res}_f(z_2) &= \lim_{z\to z_2} (z - z_2) f(z) = \frac{z_2^2}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)} \ .
\end{aligned}$$

Per semplificare queste espressioni notiamo che[3]

$$\begin{aligned}
z_1 - z_2 &= e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{3\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{\pi}{4}} \right) = i \left(-2i \sin(\pi/4) \right) = \sqrt{2} \ , \\
z_1 - z_3 &= e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{5\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} = 2 e^{i\frac{\pi}{4}} = 2 z_1 \ , \\
z_1 - z_4 &= e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{7\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2i \sin(\pi/4) = \sqrt{2}\, i \ .
\end{aligned}$$

[3]Queste espressioni per le differenze tra radici sono facili da vedere geometricamente disegnando i quattro punti come i vertici di un quadrato inscritto nel cerchio unitario, che ha lato $\sqrt{2}$.

e analogamente

$$z_2 - z_3 = e^{i\frac{3\pi}{4}} - e^{i\frac{5\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{4}} - e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 2i\sin\left(3\pi/4\right) = \sqrt{2}\,i\ ,$$
$$z_2 - z_4 = e^{i\frac{3\pi}{4}} - e^{i\frac{7\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{4}} - e^{i\pi}e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2z_2\ .$$

Sostituendo nell'espressione per i residui, abbiamo perciò

$$\mathrm{Res}_f(z_1) = \frac{z_1^2}{\sqrt{2}\cdot 2z_1\cdot\sqrt{2}\,i} = -i\frac{z_1}{4}\ ,$$
$$\mathrm{Res}_f(z_2) = \frac{z_2^2}{(-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}\,i\cdot 2z_2} = i\frac{z_2}{4}\ .$$

Pertanto troviamo

$$I = 2\pi i\left(-i\frac{z_1}{4} + i\frac{z_2}{4}\right) = 2\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot(z_1 - z_2) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\ .$$

Notiamo che il risultato finale è reale e positivo, come deve essere l'integrale sull'asse reale di una funzione reale e positiva.