

WARD - TAKAHASHI IDENTITIES for BRST-transformations.

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \quad \text{è inv. sotto BRST}$$

⇒ impone delle RELAZIONI sui COLLEGATORI

Consideriamo un operatore O (non necessariamente gauge-inv.)

$$\langle O \rangle = \int DA Dc D\bar{c} DB O(A, c, \bar{c}, B) e^{iS[A, c, \bar{c}, B]}$$

rinominiamo le
variab. d'integraz.

$$= \int DA' Dc' D\bar{c}' DB' O(A', c', \bar{c}', B') e^{iS[A', c', \bar{c}', B']}$$

cambio di
variabili.
MISURA INVES.
è INV. (Jac=1)

$$\begin{cases} A' = A + \epsilon Q_B \cdot A \\ c' = c + \epsilon Q_B \cdot c \\ \bar{c}' = \bar{c} + \epsilon Q_B \cdot \bar{c} \\ B' = B \end{cases}$$

$$= \int DA Dc D\bar{c} DB (O + \delta_{\text{BRST}} O) e^{iS[A, c, \bar{c}, B]}$$

$$= \langle O \rangle + \langle \delta_{\text{BRST}} O \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \delta_B O \rangle = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \langle Q_B \cdot O \rangle = 0$$

Ora consideriamo le fun. di Green

$$\tilde{G}(x, x_1, \dots, x_N) = \int DA Dc D\bar{c} DB O(x) \prod_{i=1}^N O_i(x_i) e^{iS}$$

\uparrow
BRST invarianti

Facciamo stesso procedimento di sopra:

$$\langle (Q_B \cdot O) \prod_i O_i \rangle = 0$$

→ correlatore di un'operatore BRST-esatto con qualsiasi op. BRST-inv. è nullo.

Usiamo qto risultato per dimostrare che i correlatori di operatori BRST-INVARIANTI sono indipendenti dalle scelte del gauge fixing $G(A)$ (qto in particolare è vero per le funt. di parizione $\langle 1 \rangle$)

Ricordiamoci che
$$L = L_{g.i.} + Q_{BRST} \cdot \left[\bar{c}^a G^a(A) - \sum \frac{\xi^a}{2} \bar{c}^a B^a \right]$$

⇒ Se prendiamo due diverse funt. $G_1(A)$ e $G_2(A)$,

allora

$$S_1 - S_2 = \int d^3x Q_B \cdot \left[\bar{c}^a G_1^a(A) - \bar{c}^a G_2^a(A) \right] = Q_B \cdot V_{12}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle \prod_i O_i(x_i) \rangle_1 &= \int e^{iS_1} \prod_i O_i = \int e^{iS_2 + iQ_B V_{12}} \prod_i O_i \\ &\quad \begin{matrix} \uparrow_{BRST-inv.} \\ e^{iQ_B V_{12}} = 1 - iQ_B R_{12} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow_{Q_B^2=0} \\ R_{12} = \dots V_{12} + \dots V_{12}(Q_B V_{12}) + \dots \end{matrix} \\ &= \int e^{iS_2} \prod_i O_i - \underbrace{i \int e^{iS_2} Q_B \cdot R_{12} \prod_i O_i}_{=0 \text{ in } W1} \end{aligned}$$

$$= \langle \prod_i O_i(x_i) \rangle_2$$

"⇒" gli elem. della matrice S , che si derivano utilizzando tali correlatori, sono anch'essi indip. da $G(A)$.

Qte relazioni sono formali, ci potrebbe essere delle divergenze
→ PI va regolarizzato

Se non sceglie un REGULATOR che rompe l'inv. in BRST,
questi risultati da ottenere direttamente potrebbe non essere
più validi.

Ci sono 3 possibilità:

1) Esiste un REGOL. BRST-inv. e lo usiamo:
i risultati trovati sopra sono validi in la teoria
regolarizzata (e anche in la teoria rinormalizzata)

2) Esiste un REGOL. BRST-inv. ma non lo usiamo
nei conti: proprietà trovate sopra non possono
essere applicate, ma i risultati sono ancora validi,
anche se nascosti

3) Non esiste un REGOL. BRST-inv.: BRST sym è
ANOMALIA.

RINORMALIZZAZIONE delle teorie di gauge non-abeliane

Consideriamo la lagrangiana BARE (in gauge di Lorentz) per qualche gruppo di Lie G :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + \frac{1}{2} \int^{abc} A_\mu^a A_\nu^b (\partial^\mu A^{c\nu} - \partial^\nu A^{c\mu}) \\
 & - \frac{1}{4} \int^{bce} \int^{dea} A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu} A^{e\nu} + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \\
 & - \bar{c}^a \partial^2 c^a - g \bar{c}^a \partial^\mu \int^{abc} A_\mu^b c^c \\
 & + i \bar{\Psi} \not{\partial} \Psi - m \bar{\Psi} \Psi - g \bar{\Psi} \gamma^\mu t_R^a \Psi A_\mu^a \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{campo} \\ \text{fermionico} \\ \text{in rep. } R \\ \text{di } G \end{array}
 \end{aligned}$$

Grado di divergenza

- \mathcal{L} contiene termini di mass-dim $\leq 4 \rightarrow$ c'è aspettazione sufficienti in un numero finito di ampiezze

- Abbiamo diversi tipi di VERTICI delle forme

$$(u, v, k) \quad \text{con} \quad \begin{cases} u & \text{linee fermioniche} \\ v & \text{bosoni di gauge} \\ k & \text{ghost} \end{cases}$$

$$V_{(u,v,k)} = \# \text{ vertici del tipo } (u, v, k)$$


- Ricordiamo le seguenti relazioni

$$2 V_{(2,1,0)} = E_f + 2 I_f$$

sum

$E_f = \#$ linee est. del comp \mathcal{L}

$I_f = \#$ linee interne del comp \mathcal{L}

$$V_{(2,1,1,0)} + 3 V_{(0,3,0)} + 4 V_{(0,1,4,0)} + V_{(0,1,1,2)} = E_A + 2I_A$$


$$2 V_{(0,1,1,2)} = E_C + 2I_C$$

\Downarrow

$$2I_f = 2V_{(2,1,1,0)} - E_f$$

$$2I_b \equiv 2I_A + 2I_C = V_{(2,1,1,0)} + 3V_{(0,3,0)} + 4V_{(0,1,4,0)} + 3V_{(0,1,1,2)} - \underbrace{E_A - E_C}_{\equiv -E_b}$$

- Il numero dei loop è

$$L = \underbrace{I_f + I_b}_{\text{momenti interni}} - \underbrace{V_{(2,1,1,0)} - V_{(0,3,0)} - V_{(0,1,4,0)} - V_{(0,1,1,2)} + 1}_{\text{- \# funt. } \int}$$

\Downarrow

Il grado di divergenza è dato da

$$\int \frac{\prod_i d^d q_i}{\prod \text{propagators}} \quad (p \text{ nei vertici})$$

$$D = \underbrace{dL}_{\text{misura di integrali}} - \underbrace{2I_b - I_f}_{\text{propagatori}} + \underbrace{V_{(0,1,1,2)} + V_{(0,3,0)}}_{p \text{ nei vertici}}$$

$$D = d (I_f + I_b - V_{(2,1,1,0)} - V_{(0,3,0)} - V_{(0,1,1,2)} + 1) - 2I_b - I_f + V_{(0,1,1,2)} + V_{(0,3,0)}$$

$$= \underbrace{I_f (d-1)} + \underbrace{I_b (d-2)} - dV_{(2,1,1,0)} - (d-1)V_{(0,3,0)} - dV_{(0,1,4,0)} - (d-1)V_{(0,1,1,2)} + d$$

$$= (d-1) \left(V_{(2,1,1,0)} - \frac{E_f}{2} \right) + \frac{(d-2)}{2} \left(V_{(2,1,1,0)} + 3V_{(0,1,3,0)} + 4V_{(0,1,1,2)} + 3V_{(0,1,1,2)} - E_b \right) - \dots$$

$$= d - \frac{d-1}{2} E_f - \frac{d-2}{2} E_b + V_{(2,1,1,0)} \left(\frac{d-4}{2} \right) + V_{(0,1,3,0)} \left(\frac{3}{2}(d-2) - d + 1 \right) + V_{(0,1,1,2)} \left(1 - d + \frac{3}{2}(d-2) \right)$$

$$= d - \frac{d-1}{2} E_f - \frac{d-2}{2} E_b + \frac{d-4}{2} \left[V_{(2,1,1,0)} + V_{(0,1,3,0)} + 2V_{(0,1,1,2)} + V_{(0,1,1,2)} \right]$$

La dipendenza di D dal # di vertici si annulla per $d=4$ (\leftrightarrow operatori in L sono mass-dim = 4)

In $d=4$

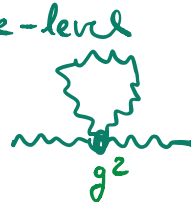
$$D = 4 - \frac{3}{2} E_f - E_b$$

\rightarrow c'è un numero finito di supertraiettorie 1PI che sono potenzialmente divergenti.

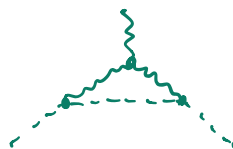
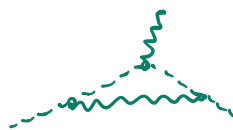
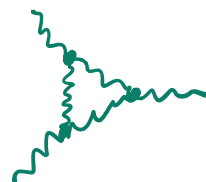
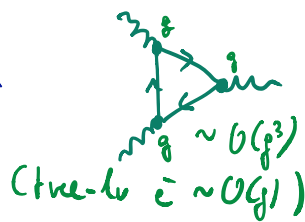
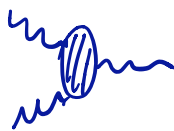
Andiamo a vedere quali sono tali 1PI comp. divergenti. (Anche se sono Opt e 1pt)

All'ordine g^2 risulta a tre-level

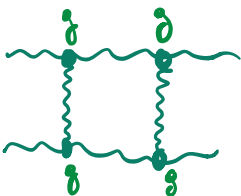
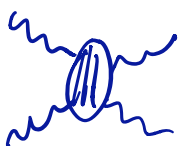
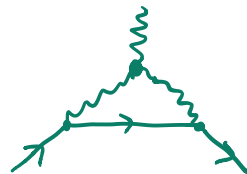
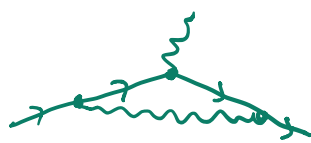
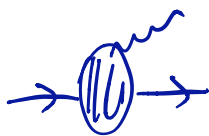
$D=2$



$D=1$

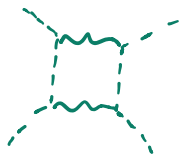
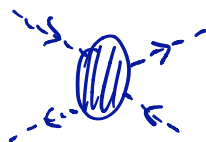


$D=0$



$\sim O(g^4)$ (tree-level $\bar{c} \sim O(g^2)$)

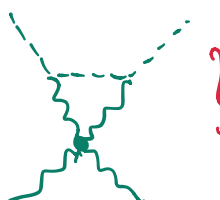
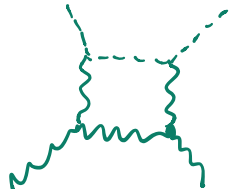
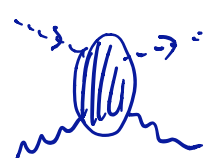
(*)



?

Non ci sono termini in L del tipo

$(\bar{c}c)^2$



?

$\bar{c}cAA$

(*) sono sperimentalmente divergenti.

l'id di Ward relativa alla simmetria $(\bar{c} \mapsto \bar{c} + \gamma)$ ^{cont.} permette di capire che il suo grado di div. è < 0 .

Antighost translation invariance:

$$L_{gh} = \partial^\mu \bar{c} D_\mu c \quad \text{inv. sotto } \bar{c} \mapsto \bar{c} + \gamma \quad \gamma \text{ cont}$$

$$\int Dc D\bar{c} e^{i \int L_{gh}} \bar{c}(y) = \int Dc D\bar{c} e^{i \int L_{gh} + i \int \partial^\mu \gamma(x) D_\mu c} (\bar{c} + \gamma)$$


↑
cambio coord. usando
 $\bar{c} \mapsto \bar{c} + \gamma(x)$

$$= \int Dc D\bar{c} e^{i \int L_{gh}} \bar{c}(y) + \int \gamma(x) \langle (-i) \partial^\mu D_\mu c(x) \bar{c}(y) \rangle d^4x + \int \gamma(x) \delta(x-y) d^4x$$

$$\Rightarrow \partial_x^\mu \langle i D_\mu c(x) \bar{c}(y) \rangle = \delta(x-y)$$

p^μ  = costante fissata

\Rightarrow  $D=1 \rightarrow D=0$ ancora div.

 $D=0 \rightarrow D=-1$
 $D=0 \rightarrow D=-2$ } Convergenti

Qta simm \bar{c} presente in $G(A) = \partial^m A_\mu$.

Per altre scelte di $G(A)$, non ha bisogno di termini
 $\sim c^4$ in poter rincondizionare la fonte.

