2 Novembre

$\forall\ X \subseteq \mathbb{R}$, la chiusura è

$$\overline{X} = X \cup X'$$

X è detto un chiuso se $X = \overline{X}$.

X si dice compatto se è chiuso e se è limitato (cioè se è limitato sia superiormente che inferiormente).

Ad 1) es $X = [0,1]$ è compatto.

2) $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ è compatto.

$$\{x_1, \dots, x_n\}' = \emptyset$$

$$\sup X = \max X < +\infty$$
$$\inf X = \min X > -\infty$$

3) $\mathbb{N}$ è non compatto perché $\sup \mathbb{N} = +\infty$.

4) $\mathbb{Z}$ non è compatto perché $\sup \mathbb{Z} = +\infty$, $\inf \mathbb{Z} = -\infty$.

<u>Def</u> Sia X un insieme non vuoto ed $f : X \to \mathbb{R}$. Allora

1) Un punto $x_0 \in X$ si dice punto di massimo di f se

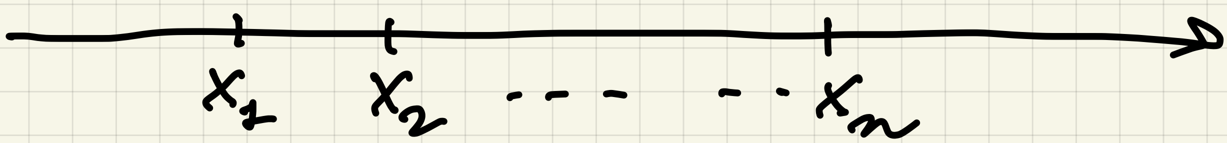
$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in X$$

2) Un punto $x_0 \in X$ si dice punto di minimo di f se

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in X$$

__Teor__ (Weierstrass) Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un compatto e sia $f \in C^0(X)$. Allora f ha sia punti di massimo che punti di minimo.

Es. Se $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}$, ricordiamoci che ogni funzione $f : X \to \mathbb{R}$ è continua



perché tutti gli $x_1, \dots, x_n$ sono punti isolati di X. Sapevamo già che esiste un punto di minimo ed un punto di massimo di f. Questo perché $f(X) = \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ con un numero finito di elementi $\Rightarrow \sup f(X) = \max f(X) =$
$= f(x_{j_0})$ dove $j_0 \in \{1, \dots, n\}$
Analogo discorso per il punto di minimo.

Dim (con $X=[a,b]$ e pt. di max)

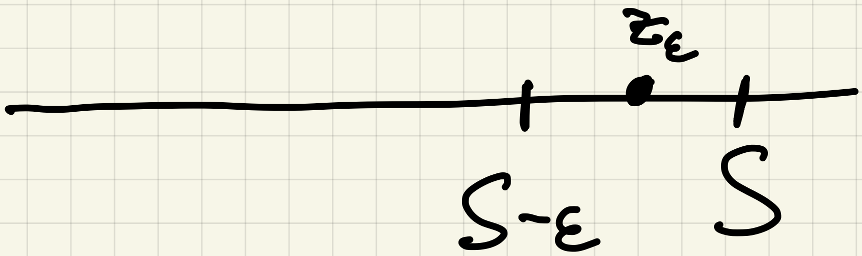
L'esistenza del punto di massimo è equivalente al fatto che $\sup f([a,b]) = \max f([a,b])$. Se l'enunciato è falso allora esiste $f \in C^0([a,b])$ t.c. $S=\sup f([a,b])$ non è il massimo di $f([a,b])$ (cioè, il massimo non esiste).

Supponiamo

che esiste una successione $\{y_n\}$ in $f([a,b])$ t.c. $\lim_{n\to+\infty} y_n = S$.

Per esempio, se $S<+\infty$ allora supponiamo che $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ z_\varepsilon \in f([a,b])$ t.c.

$$S-\varepsilon < z_\varepsilon \le S.$$



$\varepsilon = \frac{1}{n}$ $\qquad$ $z_{\frac{1}{n}} =: y_n$ $\qquad$ $S-\frac{1}{n} < y_n \le S$

per i carabinieri $\lim_{n\to\infty} y_n = S$.

Per $S = +\infty$ la dimostrazione è analoga.

In conclusione, esiste $\{y_n\}$ in $f([a,b]) = \{f(x) : a \le x \le b\}$ con

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = S \doteq \sup f([a,b]).$$

Per ogni y_n esiste un $x_n \in [a,b]$ t.c. $y_n = f(x_n)$. Resta pertanto definita una successione $\{x_n\}$ in $[a,b]$.

Per B.-W. esiste $\bar{x} \in [a,b]$ e una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ con

$$\bar{x} = \lim_{k\to+\infty} x_{n_k}.$$

Notare che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} y_n = S$

Questo implica $\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to+\infty} y_{n_k} = S$

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to+\infty} y_{n_k} = S$$

D'altra parte, $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \bar{x} \in [a,b]$

e la continuità di f in $[a,b]$

implicano

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x})$$

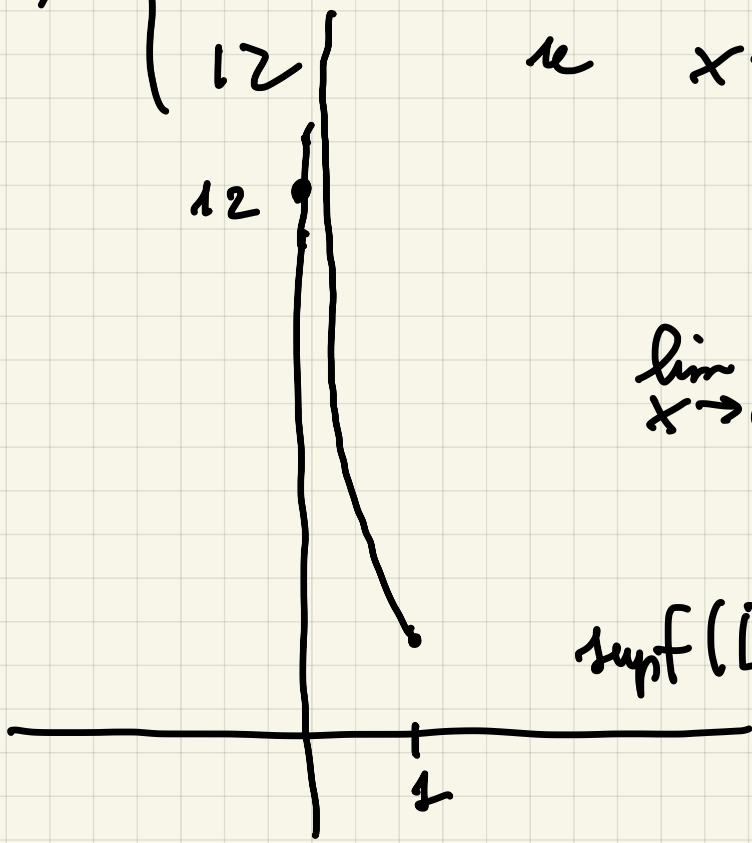
Otteniamo $S = f(\bar{x})$. Ma avevamo supposto che non esistesse punto di massimo.

Assurdo. $\square$

Esempio

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 12 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} =$$

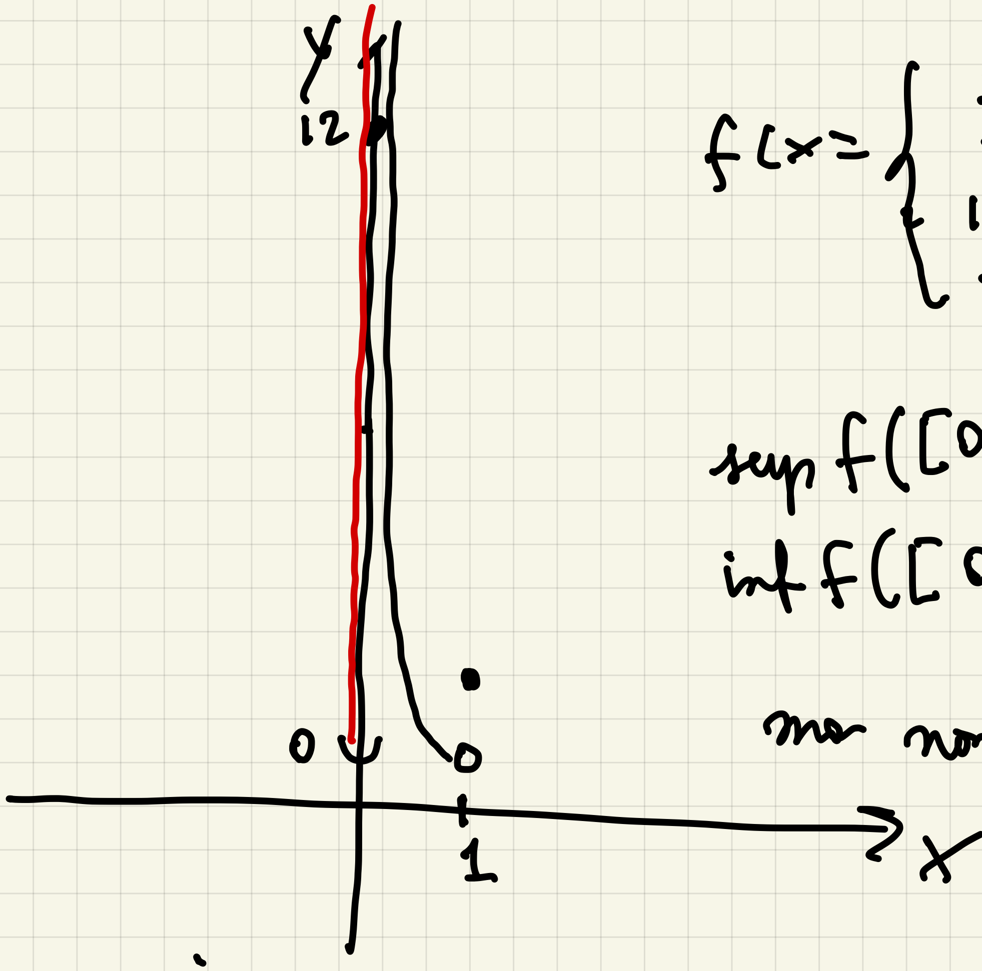
$$= +\infty$$

$$\sup f([0,1]) = +\infty$$

Qui f non è continua in 0

$f \notin C^0([0,1])$

2) $$f = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 < x < 1 \\ 12 & x = 0 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$



$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & 0<x<1\\ 12 & x=0\\ 2 & x=1\end{cases}$$

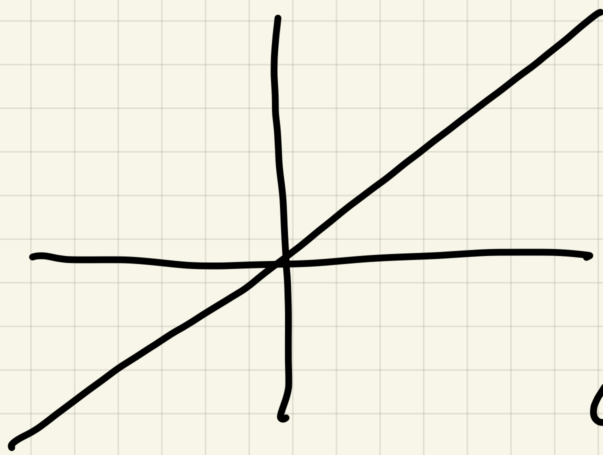
$\sup f([0,1]) = +\infty$

$\inf f([0,1]) = \inf(1,+\infty) = 1$

ma non c'è $\min f([0,1])$

$\min(1,+\infty)$ non esiste.

3) $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è in $C^0(\mathbb{R})$. Non ha punti di max/min su $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ non è un insieme compatto.



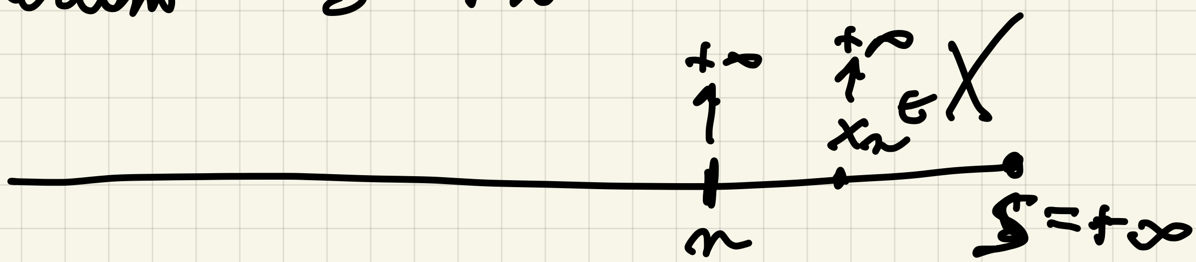
4) $x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

non c'è alcun punto di max ma 0 è il punto di min.

Esercizio Sia $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $S = \sup X$. Allora esiste $\{x_n\}$ in X con $\lim_{n\to+\infty} x_n = S$.

1) Il caso $S<+\infty$ l'ho già dimostrato all'interno del Teor. di Weierstrass

2) Consideriamo $S=+\infty$



Consideriamo la successione $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ \exists\, x_n\in X \text{ t.c. } n < x_n < +\infty} \quad \ast$$

Infatti se questa proposizione fosse falsa esisterebbe $n_0\in\mathbb{N}$ t.c. $x\le n_0 \ \forall x\in X$.

$\Rightarrow +\infty > n_0 \geq \sup X = +\infty$ assurdo

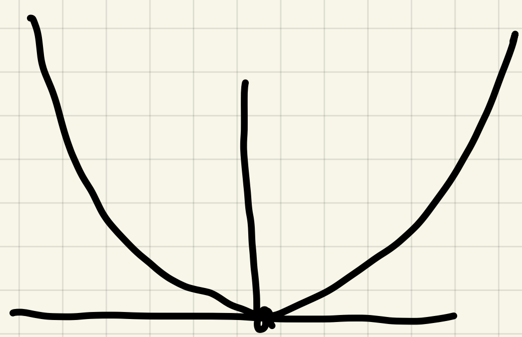
$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Esercizio 1 Sia $\{x_n\}$ una successione con $\lim_{n\to+\infty} x_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora se $\{x_{n_k}\}$ è una sottosuccessione, si ha

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = L.$$

Esercizio 2 $n_k \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Esempio



$y = x^2$

0 è pto di minimo

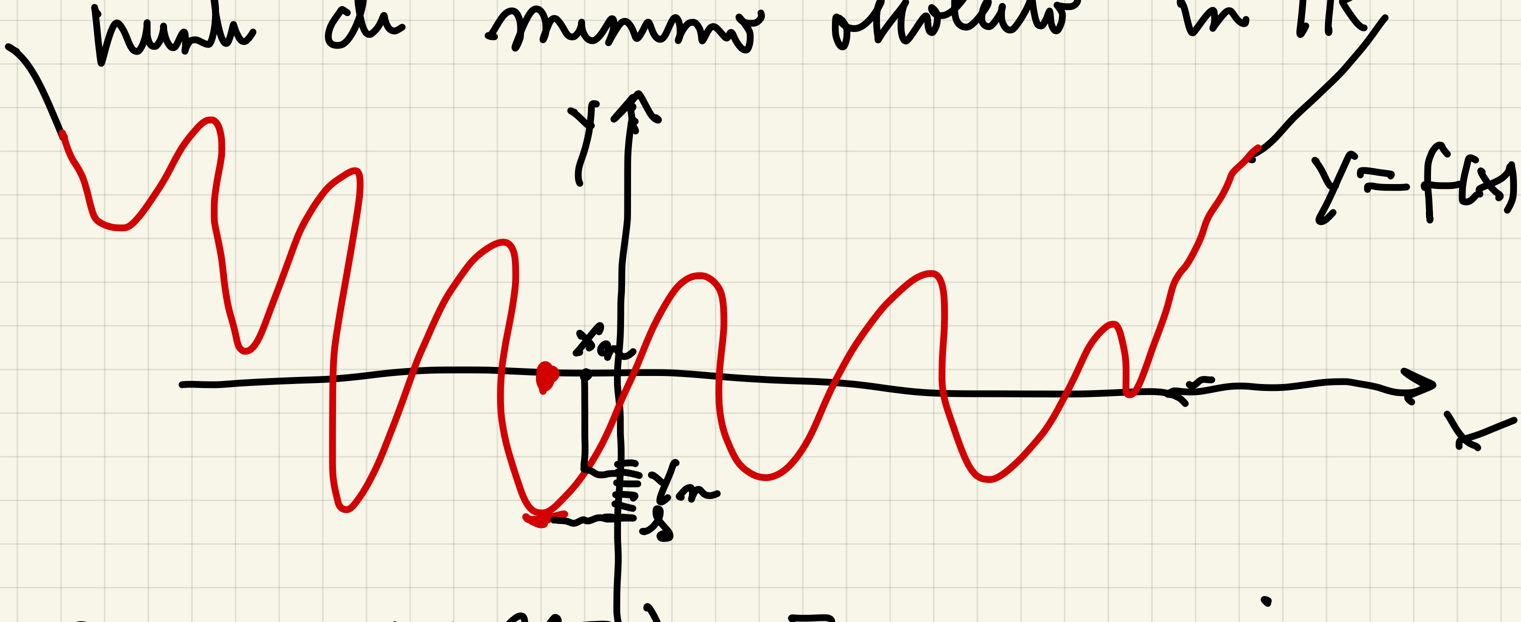
Esercizio Sia $f \in C^0(\mathbb{R})$ t.c.

$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Allora $f(x)$ ha punto di minimo assoluto in $\mathbb{R}$

Esercizio. Sia $f \in C^0(\mathbb{R})$ t.c.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$. Allora $f(x)$ ha

punti di minimo assoluto in $\mathbb{R}$



Sia $s = \inf f(\mathbb{R})$. $\exists$ una successione

$\{y_n\}$ in $f(\mathbb{R})$ t.c. $\lim_{n\to+\infty} y_n = s$.

Siccome $\forall\ y_n$ $\exists$ un $x_n \in \mathbb{R}$ con

$y_n = f(x_n)$, resta definita una successione

$\{x_n\}$ in $\mathbb{R}$, $\exists$ una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$

che ha limite in $\overline{\mathbb{R}}$. Notare che

siccome $\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = s$

allora $\lim_{n\to+\infty} f(x_{n_k}) = s\ (<+\infty)$

Può essere $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \pm\infty$

Infatti se fosse $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \pm\infty$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k})}_{= s < +\infty} = \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \qquad s = \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$$

Pertanto $\exists\ \bar{x} \in \mathbb{R}$ t.c. $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \bar{x}$

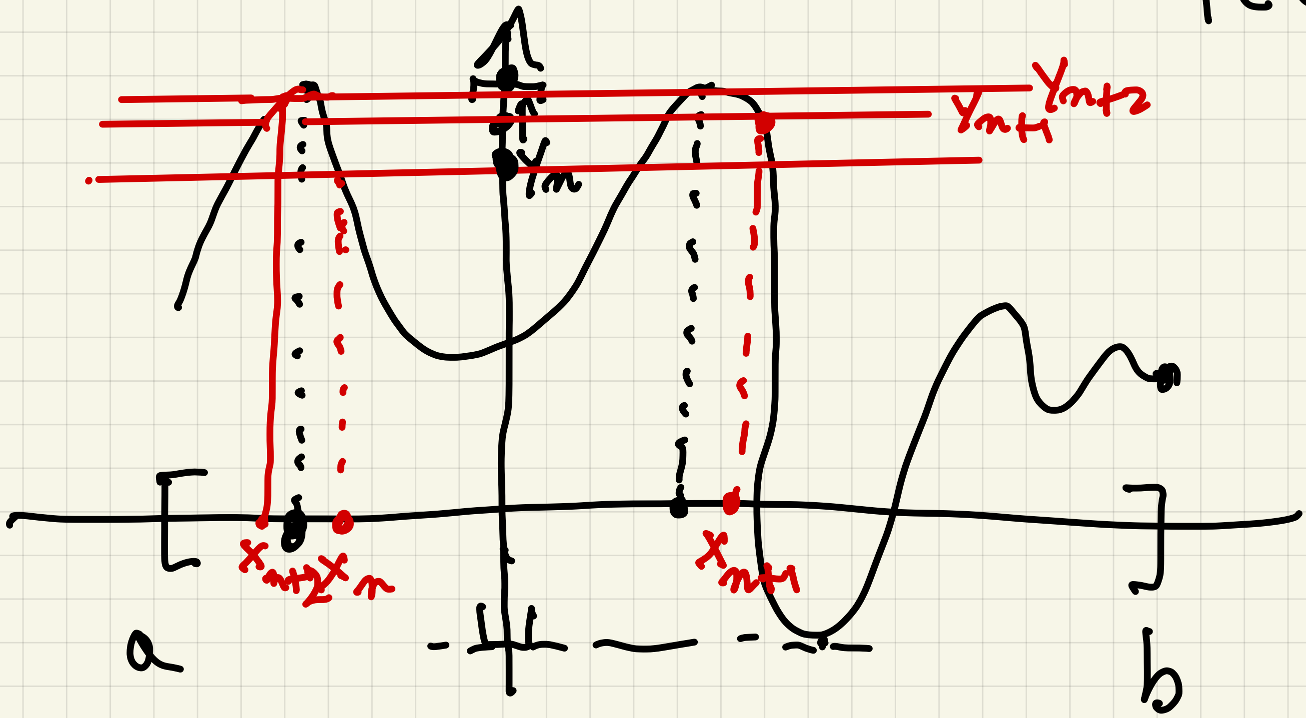
allora per continuità

$$\underbrace{\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k})}_{= s} = f(\bar{x})$$

$$s = f(\bar{x}) \Rightarrow s = \min f(\mathbb{R})$$

e $\bar{x}$ è un punto di minimo. $\square$

$f \in C^0([a,b])$



$y_n = f(x_n)$