## Definizione di ergodicità nel caso di turbolenza omogenea e stazionaria.

Si dice che la turbolenza rispetta il principio di ergodicità se la media di una grandezza del fluido, ovvero il valore di aspettazione, calcolato nel tempo è uguale a quella calcolata nello spazio. Sotto questa ipotesi, anche la media di ensemble coincide con quella dello spazio e quella nel tempo.

### Osservazione

Sotto l'ipotesi di Taylor, secondo le quale la turbolenza viene avvetta, cioè i vortici sono congelati, vale il principio di ergodicità.

### Dimostrazione

Consideriamo il caso monodimensionale per semplicità:

Ipotesi di Taylor: $\frac{df}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = -u\frac{\partial f}{\partial x}$

$$E_t[f] = \frac{1}{\delta t}\int_{t_0}^{t_0+\delta t} f(t)\,dt = \frac{1}{\delta t}\int_{t_0}^{t_0+\delta t}\left(f(x_0,t_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=t_0}(t-t_0)\right)dt$$

sviluppando in serie la funzione f attorno al punto $x_0$ e $t_0$

$$= f(x_0,t_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=t_0}\frac{\delta t}{2}$$

$$E_x[f] = \frac{1}{\delta x}\int_{x_0}^{x_0-\delta x} f(x)\,dx = \frac{1}{\delta x}\int_{x_0}^{x_0-\delta x}\left(f(x_0,t_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0}(x-x_0)\right)dx$$

sviluppando in serie la funzione f attorno al punto $x_0$, $t_0$ e integrando nello spazio che precede il punto $x_0$

Vedi segno $-\frac{\delta x}{2}$

$$= f(x_0,t_0) - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0}\frac{\delta x}{2}$$

Ricordando che $\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=t_0} = -u\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0}$ e che $u\,\delta t = \delta x$ si ha

$$E_x[f] = f(x_0,t_0) - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0}\frac{\delta x}{2} = f(x_0,t_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=t_0}\frac{\delta x}{u\cdot 2} = f(x_0,t_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=t_0}\frac{\delta t}{2} = E_t[f]$$

$$\boxed{E_x[f] = E_t[f]}$$