Considerazioni sulla compressibilità dell'aria nello strato limite atmosferico e ripercussione sull'equazione di continuità.

Consideriamo l'equazione di continuità

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}}_{\frac{d\rho}{dt}} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

Confrontiamo le variazioni nel tempo della densità rispetto al termine dovuto alla divergenza.

a) Nel ABL consideriamo situazioni stazionarie o al limite situazioni in cui $\left|\frac{\partial \rho}{\partial t}\right| << \left|u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}\right|$. Ciò è vero in quanto variazioni locali della densità sono associate a variazioni di pressione o temperatura che sono più lente rispetto a quelle dinamiche.

b) La variazione di densità maggiore della densità si può avere quando si considerano moti verticali che interessano lo strato limite nel suo complesso:

$$u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \simeq w \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

c) Valori tipici delle velocità dei venti nello strato limite atmosferico sono $u \simeq v \simeq 10\, m s^{-1}$ $w \simeq 1\, m s^{-1}$ e le rispettive lunghezze sono $L \simeq 10^4\, m$ $h \simeq 10^3\, m$ = altezza ABL

Quindi $\frac{d\rho}{dt} \simeq w \frac{\partial \rho}{\partial z}$ Valutiamo $\frac{\partial \rho}{\partial z}$ a partire dalla equazione dell'equilibrio idrostatico per capire quali variazioni possiamo riscontrare nel ABL

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad e \quad con \quad p = \rho R T \qquad \frac{\partial (\rho R T)}{\partial z} = -\rho g$$

$$RT \frac{\partial \rho}{\partial z} + R\rho \frac{\partial T}{\partial z} = -\rho g \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho \frac{1}{T}\left[\frac{g}{R} + \frac{\partial T}{\partial z}\right]$$

$\frac{\partial T}{\partial z} \simeq 10^{-2} K m^{-1}$ $\quad g \simeq 10\, m s^{-2}$ $\quad R \cong 300\, J K^{-1} Kg^{-1}$ $\quad T \simeq 3 \cdot 10^2\, K$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z} = -\zeta \quad \text{date} \quad \zeta = \frac{1}{3 \cdot 10^2 K}\left[\frac{10\, m s^{-2}}{3 \cdot 10^2\, m^2 s^{-2} kg\, kg^{-1} K^{-1}} + 10^{-2} K m^{-1}\right]$$

Quindi $\zeta \cong 3\cdot 10^{-2}\,K\,m^{-1} / 3\cdot 10^{+2}\,K \simeq 10^{-4}\,m^{-1}$

Pertanto le variazioni di ρ con l'altezza sono ottenute usando l'integrale

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} \simeq -10^{-4}\,m^{-1}\cdot 1\,kg\,m^{-3} \simeq 10^{-4}\,kg\,m^{-2}$$

Confrontando i contributi all'equazione di continuità si ha

$$w\frac{\partial \rho}{\partial z} \simeq 10^{-4}\,kg\,m^{-3}s^{-1} \quad \text{e} \quad \rho\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \rho\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} + \rho\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 1\,kg\,m^{-3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \simeq 1\,kg\,m^{-3}\left(2\frac{10\,ms^{-1}}{10^{4}\,m} + \frac{10\,ms^{-1}}{10^{3}\,m}\right)$$

$$\simeq 3\cdot 10^{-3}\,kg\,m^{-2}$$

Pertanto la condizione a divergenza nulla è rispettata in tutto lo strato limite atmosferico normalmente osservato

$$\boxed{\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \qquad \bar{\nabla}\cdot\bar{u} = 0}$$

Conservazione di proprietà per unità di massa e di volume

Sia η una quantità che si conserva per unità di massa

$$\frac{d\eta}{dt} = \underbrace{s}_{\text{sorgente}} \qquad \boxed{\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_i\frac{\partial \eta}{\partial x_i} = s}$$

Per ottenere una relazione per unità di volume moltiplichiamo l'eq. per la densità ed usiamo l'equazione di continuità moltiplicata per η

$$\rho\frac{\partial \eta}{\partial t} + \rho u_i\frac{\partial \eta}{\partial x_i} = s\rho \qquad \eta\frac{\partial \rho}{\partial t} + \eta u_i\frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \eta\rho\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial(\rho\eta)}{\partial t}}_{\text{storage}} + \underbrace{\frac{\partial(\rho u_i\eta)}{\partial x_i}}_{\text{flusso di }\rho\eta} = \underbrace{s\rho}_{\text{sorgente}}} \quad \text{oppure} \quad \boxed{\underbrace{\frac{d(\rho\eta)}{dt}}_{\text{Variazione lagrangiana di }\rho\eta} = -\underbrace{\boxed{(\rho\eta)\frac{\partial u_i}{\partial x_i}}}_{\text{Variazione per divergenza}} + \underbrace{s\rho}_{\text{sorgente}}}$$