Equazione per la conservazione dell'energia

Conservazione energia per unità di massa $\frac{dq}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}$

Scrivendola per unità di volume

$$\rho \frac{dq}{dt} = \rho c_p \frac{dT}{dt} - \frac{dp}{dt}$$

e definiamo il flusso di energia netto entrante il volume più la produzione interna con $\frac{d\varepsilon}{dt} := \rho \frac{dq}{dt}$

quindi $\frac{d\varepsilon}{dt} = \rho c_p \frac{dT}{dt} - \frac{dp}{dt}$

Consideriamo la temperatura potenziale che consegue dalla condizione di adiabaticità del processo

$$\theta = T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/c_p}$$

Eseguiamo la derivazione nel tempo $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{T}\frac{dT}{dt} - T\frac{R}{c_p}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/c_p - 1}\frac{p_0}{p^2}\frac{dp}{dt}$

ovvero

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{T}\frac{dT}{dt} - \frac{\theta}{p}\frac{R}{c_p}\frac{dp}{dt} = \frac{\theta}{T c_p}\left(c_p\frac{dT}{dt} - \frac{TR}{p}\frac{dp}{dt}\right)$$

$$= \frac{\theta}{T c_p}\left(c_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}\right) = \frac{\theta}{T}\frac{1}{\rho c_p}\left(\rho c_p \frac{dT}{dt} - \frac{dp}{dt}\right)$$

Quindi

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{T}\frac{1}{\rho c_p}\boxed{\frac{d\varepsilon}{dt}}}$$

Energia netta entrante o prodotta nel volume

Valutiamo

$$\boxed{\frac{d\varepsilon}{dt} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(K\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)}_{\text{conduzione}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(R_j)}_{\text{radiazione}} - \lambda_e M_e - \lambda_s M_s}$$

calore latente evap. / cond.

evaporazione condensazione vapore acqueo solidificazione

È stata considerata trascurabile la dissipazione viscosa dovuta ai termini $\nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$

Semplificazione nel caso delle applicazioni allo strato limite atmosferico $\theta = T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/c_p}$ $R \simeq 300\ \mathrm{J\,kg^{-1}K^{-1}}$ $c_p \simeq 1000\ \mathrm{J\,kg^{-1}K^{-1}}$

Quindi $\frac{\theta}{T} \simeq \left(\frac{p_0}{p}\right)^{3/10}$ ricordiamo che nell'ABL solitamente

$\left|\frac{p}{p_0}\right| \gtrsim \frac{8}{10}$ cioè $1 \le \left|\frac{p_0}{p}\right| < \frac{10}{8}$ pertanto $\frac{\theta}{T} \simeq 1 \simeq \left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/c_p}$

Infatti consideriamo la funzione $\left(\frac{P_0}{P}\right)^{R/c} = \left(1+\frac{P_0-P}{P}\right)^{R/c_p}$
sia ora $x := \frac{P_0-P}{P}$ e sviluppiamo la funzione in serie attorno al punto $x=0$

$$(1+x)^{R/c_p} \simeq 1 + \frac{R}{c_p}x \quad \text{essendo } 0 \le |x| \le \frac{2}{8} \quad \text{si ha } \left(\frac{P_0}{P}\right)^{R/c_p} \simeq \frac{6}{80}$$

In definitiva nell'ABL si può considerare questa equivalenza

$$\frac{\theta}{T} = \left(\frac{P_0}{P}\right)^{R/c_p} \simeq 1 \qquad (1)$$

Quindi l'equazione per la conservazione dell'energia può riscriversi come

$$\frac{d\theta}{dt} \simeq \frac{1}{\rho c_p}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_j} k \frac{\partial T}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial R_j}{\partial x_j} - \lambda_e M_e - \lambda_s M_s\right]$$

Dalla relazione (1) si ha che $\frac{\partial T}{\partial x_j} \simeq \frac{\partial \theta}{\partial x_j}$ quindi

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} \simeq \frac{k}{\rho c_p}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2} - \frac{1}{\rho c_p}\left[\frac{\partial R_j}{\partial x_j} - \lambda_e M_e - \lambda_s M_s\right]} \qquad 1$$

osservazione λ_e e λ_s sono i calori latenti di evaporazione e solidificazione dell'acqua rispettivamente e M_e e M_s sono ricavabili dalle equazioni di conservazione dell'acqua liquida del ghiaccio e del vapore. Infatti siano q umidità specifica quindi massa di vapore su massa totale di aria, q_e acqua liquida specifica e q_i acqua solida specifica si debbono applicare le seguenti relazioni di conservazione per unità di volume

$$\frac{d(\rho q)}{dt} = -(\rho q)\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + M_e \; ; \qquad \frac{d(\rho q_e)}{dt} = -(\rho q)_e \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + M_s - M_e$$

$$\frac{d(\rho q_i)}{dt} = -(\rho q)_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - M_s$$

Equazione di conservazione dell'energia per i valori primi e per le deviazioni. Iniziando dalla ① e tenendo presente che $\theta = \bar{\theta} + \theta'$ e $\rho = \bar{\rho} + \rho'$ e osservando che

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} \simeq \frac{1}{\bar{\rho}}\left(1 - \frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right) \simeq \frac{1}{\bar{\rho}}$$

in tutte le interazioni di ABL

si ha:

$$\frac{d\theta}{dt} = K \frac{1}{\bar{\rho} c_p} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2} - \frac{1}{\bar{\rho} c_p} S' \qquad \text{dove} \quad S := \left[-\frac{\partial R_j}{\partial x_j} - \lambda_e M_e - \lambda_s M_s \right]$$

$$E\left[\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \theta'}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_i} + \bar{u}_i \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} + u_i' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_i} + u_i' \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} = \frac{k}{\bar{\rho} c_p}\left[\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_j^2}\right] - \frac{1}{\bar{\rho} c_p} S \right]$$

L'equazione per i valori medi diventa

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_i} = \frac{k}{\bar{\rho} c_p} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_i^2} - \underbrace{\frac{\partial \left(\overline{u_i' \theta'}\right)}{\partial x_i}}_{\text{turbulent transport}} - \frac{1}{\bar{\rho} c_p} S'$$

Si debbono cercare relazioni per esprimere $\frac{\partial \overline{u_i' \theta'}}{\partial x_i}$ cioè la divergenza del flusso turbolento.

Se utilizziamo la K theory cioè la chiusura al primo ordine.

$$\frac{\partial \overline{u_i' \theta'}}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\overset{\text{eddy viscosity}}{K_e}}{\bar{\rho} c_p} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_i} \right) = \frac{K_e}{\bar{\rho} c_p} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_i^2}$$

$$\boxed{\frac{d\bar{\theta}}{dt} = \left[\left(\frac{K}{\bar{\rho} c_p} + \frac{K_e}{\bar{\rho} c_p} \right) \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_i^2} \right] - \frac{1}{\bar{\rho} c_p} S'}$$