Equazione di stato e Temperatura virtuale

Si consideri l'equazione di stato per l'aria umida

$$p = p_d + p_v$$

p_d = pressione aria secca

p_v = pressione vapore acqua

$$p_d = \rho_d R_d T_d \quad \text{e} \quad p_v = \rho_v R_v T_v$$

R costante universale gas

con $R_d := \dfrac{R}{\mu_d}$ e $R_v := \dfrac{R}{\mu_v}$

$\mu_d \simeq 0.8 \cdot \underbrace{14 \cdot 2}_{N_2} + 0.2 \cdot \underbrace{16 \cdot 2}_{O_2}$

$\mu_v \simeq \underbrace{2 + 16}_{H_2O}$

Ovviamente $T := T_d = T_v$ (equilibrio termodinamico tra aria secca e vapore)

$$p = \rho_d R_d T + \rho_v R_v T = (\rho_d R_d + \rho_v R_v) T$$

Ricordando la definizione di umidità specifica $q := \dfrac{\rho_v}{\rho}$

con $\rho := \rho_d + \rho_v$ si ha

$$p = \rho \left(\frac{\rho_d}{\rho} R_d + \frac{\rho_v}{\rho} R_v \right) T = \rho R_d \left(\frac{\rho_d}{\rho} + \frac{\rho_v}{\rho} \frac{R_v}{R_d} \right) T =$$

$$= \rho R_d \left(\frac{\rho - \rho_v}{\rho} + \frac{\rho_v}{\rho} \frac{R_v}{R_d} \right) T = \rho R_d \left(1 - q + q \frac{R_v}{R_d} \right) T =$$

$$= \rho R_d \left(1 + q \frac{R_v - R_d}{R_d} \right) T \qquad \frac{R_v - R_d}{R_d} \simeq 0.602$$

$$= \rho R_d (1 + q \cdot 0.602) T$$

$$T_v := T (1 + q \cdot 0.602)$$ Temperatura Virtuale

$$\boxed{p = \rho R_d T_v}$$

equazione di stato in cui le fluttuazioni di q sono celate in T_v

Equazione di stato per i valori medi e le fluttuazioni della temperatura virtuale

Sia $p = \overline{p} + p'$; $\rho = \overline{\rho} + \rho'$ $\quad T_v = \overline{T_v} + T_v'$

$$\overline{p} + p' = (\overline{\rho} + \rho') R_d (\overline{T_v} + T_v') \quad \text{da cui}$$

$$\overline{p} + p' = \overline{\rho} R_d \overline{T_v} + \overline{\rho} R_d T_v' + \rho' R_d \overline{T_v} + \rho' R_d T_v'$$

Eseguendo il valore di aspettazione di questa equazione si ha

$$\overline{p} = \overline{\rho} R_d \overline{T_v} + R_d E[\rho' T_v']$$

ma $|E[\rho' T_v']| \ll \overline{\rho} R_d \overline{T_v}$ in ABL

Pertanto l'equazione per i valori medi è

$$\boxed{\overline{p} = \overline{\rho} R_d \overline{T_v}}$$

Sostituendo questa equazione nell'originale si ottiene quella per le deviazioni

$$p' = \overline{\rho} T_v' R_d + \rho' \overline{T_v} R_d + \rho' T_v' R_d$$

Dividendo per $\overline{p}$ primo e secondo membro

$$\frac{p'}{\overline{p}} = \frac{\overline{\rho} T_v' R_d}{\overline{\rho} \overline{T_v} R_d} + \frac{\rho' \overline{T_v} R_d}{\overline{\rho} \overline{T_v} R_d} + \frac{\rho' T_v' R_d}{\overline{\rho} \overline{T_v} R_d}$$

$$\frac{p'}{\overline{p}} = \frac{T_v'}{\overline{T_v}} + \frac{\rho'}{\overline{\rho}} + \frac{\rho' T_v'}{\overline{\rho}\,\overline{T_v}}$$

trascurabile perché di ordine superiore delle fluttuazioni relative

$$\frac{p'}{\overline{p}} \simeq \frac{10^0 Pa}{10^5 Pa} \simeq 10^{-5} \qquad \frac{T_v'}{\overline{T_v}} \simeq \frac{10^{-1} K}{3 \cdot 10^2 K} \simeq 3 \cdot 10^{-4}$$

da cui

$$\boxed{\frac{T_v'}{\overline{T}_v} \simeq -\frac{p'}{\overline{p}}} \longleftarrow \text{fluttuazioni turbolente}$$

Consideriamo ora la temperatura potenziale

$$\theta = T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/c_p}$$

Sostituiamo la Temperatura virtuale T_V al posto della T

$$\theta_v = T_v\left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/c_p} = T(1+q\,0.602)\left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/c_p}$$

In questo modo si definisce la temperatura virtuale potenziale

Verifichiamo la temperatura potenziale virtuale (e non) e la sua dipendenza dai valori medi

sia $\theta_v = \overline{\theta}_v + \theta_v' \quad T_V = \overline{T}_V + T_V' \quad p = \overline{p} + p'$

$$\overline{\theta}_v + \theta_v' = (\overline{T}_v + T_v')\left(\frac{p_0}{\overline{p}+p'}\right)^{R/c_p} = (\overline{T}_V + T_V')\left(\frac{p_0}{\overline{p}\left(1+\frac{p'}{\overline{p}}\right)}\right)^{R/c_p} =$$

$$\simeq (\overline{T}_V + T_V')\left(\frac{p_0}{\overline{p}}\right)^{R/c_p}\underbrace{\left(1-\frac{p'}{\overline{p}}\right)^{R/c_p}}_{\sim 1}$$

da cui

$$\overline{\theta}_v + \theta_v' = (\overline{T}_V + T_V')\left(\frac{p_0}{\overline{p}}\right)^{R/c_p}$$

Calcolando i valori medi si ha

$$\boxed{\overline{\theta}_V = \overline{T}_V\left(\frac{p_0}{\overline{p}}\right)^{R/c_p}}$$

per i valori primi ovvero le fluttuazioni si ha

$$\boxed{\theta_v' = T_v'\left(\frac{p_0}{\overline{p}}\right)^{R/c_p}}$$

Ricordando che nel ABL $\left(\frac{p_0}{\overline{p}}\right)^{R/c_p} \simeq 1$ allora

$$\boxed{\theta_v' \simeq T_v'} \qquad \text{e anche} \quad \boxed{\frac{\theta_v'}{\overline{\theta}_v} = \frac{T_v'}{\overline{T}_V}}$$