Non è differenziabile

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y)^T \neq (0,0)^T \\ 0 & \text{se } (x,y)^T = (0,0)^T \end{cases}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$$

$$v=(1,0)^T \quad \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv)-f(0,0)}{t} =$$

$$v=(0,1)^T \quad \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{\frac{t^2}{2}\cdot\frac{t}{\sqrt{2}}}{\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^3}/2\sqrt{2}}{\cancel{t^3}\left(\frac{1}{2}+\frac{t^2}{4}\right)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \ldots = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Se f è differenziabile si ha

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) \overset{??}{=} \langle \underset{(0,0)}{\nabla f(0,0)}, v \rangle = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Formula del valor medio $f : \underset{\text{convesso}}{A} \to \mathbb{R}$ differenziabile

$$f(x^2) - f(x^1) = \langle \nabla f(\xi), x^2 - x^1 \rangle = df(\xi)(x^2 - x^1)$$

Se f è un campo vettoriale?

$$f(x^2) - f(x^1) \overset{?}{=} df(\xi)(x^2 - x^1)$$

NO

$\xi \in$ segmento $[x_1, x_2]$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)^T$ f è diff.bile $f'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)^T$

$$f(2\pi) - f(0) = (0,0)^T \qquad f'(\xi) \cdot (2\pi - 0) = 2\pi(-\operatorname{sen}\xi, \cos\xi)^T$$

non esiste ξ tale che $0 = -\operatorname{sen}\xi$ e $0 = \cos\xi$.

Alcuni conteggi

- Sia $w \in \mathbb{R}^n$ $\quad \eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \eta(x) = \langle w, x \rangle$ $\qquad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

$w = (w_1, \dots, w_n)^T$

$\nabla \eta(x) = w \qquad \dfrac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \right) = w_k$

- $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \qquad \dfrac{\partial}{\partial k}(\ ) = 2x_k \quad \nabla = 2x$

$\nabla \varphi(x) = 2x$

$\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \psi(x, y) = \langle x, y \rangle \qquad (y, x)^T$

$\sum x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

$\dfrac{\partial}{\partial x_1}(\ ) = y_1 \quad \dfrac{\partial}{\partial x_2}(\ ) = y_2 \ \dots \ \dfrac{\partial}{\partial x_n}(\ ) = y_n \quad \dfrac{\partial}{\partial y_1} = x_1 \quad \dfrac{\partial}{\partial y_2} = x_2 \ \dots \ \dfrac{\partial}{\partial y_n} = x_n$

$\varphi(x,y) = \langle x,y \rangle$ $\qquad \nabla\varphi = (y,x)^T$

$\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \qquad \eta(x) = (x,x)^T \qquad J\eta(x) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \\ 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$\varphi \circ \eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad (\varphi\circ\eta)(x) = \langle x,x \rangle$

$J(\varphi\circ\eta)(x) = J\varphi(\eta(x))\, J(\eta)(x)$

$J(\langle x,x \rangle) = (y,x)\Big|_{y=x} \cdot \begin{pmatrix} I_n \\ I_n \end{pmatrix} = y + x\Big|_{y=x} = 2x^T$

$\boxed{\nabla(\langle x,x \rangle) = 2x}$

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ $\qquad \varphi(x) = \|x\|$ $\qquad \nabla\varphi(x) = ?$

$\nabla(\langle x, x\rangle) = 2x$ $\qquad h(t) = \sqrt{t}$ $\qquad \eta(x) = \langle x, x\rangle$ $\qquad \underbrace{\nabla\eta = 2x}$

$h'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

$\varphi(x) = (h \circ \eta)(x)$ $\qquad J\varphi = Jh(\eta(x)) \cdot J\eta(x)$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\langle x, x\rangle}} \cdot \cancel{2}x^T$$

$$\boxed{\nabla(\|x\|) = \frac{x}{\|x\|}}$$

$h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M \qquad w \in \mathbb{R}^M \qquad \varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \qquad \varphi(x) = \langle w, h(x) \rangle$

$\nabla \varphi(x) = ? \qquad \eta(y) = \langle w, y \rangle \qquad \eta : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$

$\nabla \eta(y) = w \qquad [A \cdot B]^T = B^T \cdot A^T$

$\varphi(x) = (\eta \circ h)(x) \qquad J\varphi(x) = [\underbrace{J\eta(h(x))}_{= w^T} \cdot Jh(x)]$

$$\boxed{\nabla \varphi(x) = Jh(x)^T \cdot w}$$

Caso particolare $h(x) = Ax$ è lineare $\quad A$ matrice $M \times N$

$Jh(x) = A$

$\nabla \varphi(x) = A^T w$

$\varphi(x) = \langle w, Ax \rangle$

$$\varphi(x) = \langle Ax, x \rangle \qquad \nabla\varphi(x) = ?$$

A matrice quadrata simmetrica

Es: $N = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z \end{pmatrix}$$

$$\left\langle A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = a_{11}x^2 + \underline{a_{12}xy} + \underline{a_{13}xz} + \underline{a_{12}xy} + a_{22}y^2 + a_{23}yz + a_{13}xz + a_{23}yz + a_{33}z^2$$

$$= \boxed{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2}$$

polinomio omogeneo di secondo grado

Una forma quadratica su $\mathbb{R}^n$ è una funzione del tipo

$\varphi(x) = \langle Ax, x \rangle$ con A matrice quadrata simmetrica;

Si ha che $\varphi(x) \equiv 0$ oppure è un polinomio omogeneo di 2° grado.

$\nabla \varphi(x) = ?$ Considero la funzione $\psi(x,y) = \langle Ax, y \rangle$

$$\boxed{\nabla \psi(x,y) = (A^T y, Ax)^T}$$

Supponiamo y fissato $\psi(\cdot, y) = \langle Ax, y \rangle$ $\nabla_x \psi(x,y) = A^T y$

Supponiamo x fissato $\psi(x, \cdot) = \langle Ax, y \rangle$ $\nabla_y \psi(x,y) = Ax$

$$\varphi(x) = \langle Ax, x \rangle \qquad \psi(x,y) = \langle Ax, y \rangle \qquad \nabla \psi(x,y) = \underline{(A^T y, Ax)^T}$$

$$\eta(x) = (x, x)^T \qquad \varphi(x) = (\psi \circ \eta)(x)$$

$$J\varphi(x) = J\psi(\eta(x)) \cdot J\eta(x) = A^T y \Big|_{y=x} + Ax =$$

$$dx^2 \rightsquigarrow 2dx$$

$$(A^T y, Ax)\Big|_{y=x} \cdot \begin{pmatrix} I_N \\ I_N \end{pmatrix}$$

$$A^T = A$$

$$= A^T x + A x$$

$$= 2Ax$$

$$\boxed{\nabla \varphi(x) = 2Ax}$$

Oppure $\varphi(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + a_{NN}x_N^2$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + \dots + 2a_{1N}x_N$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_N}$$

$$\nabla \varphi = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} = 2Ax$$

Derivate di ordine superiore

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad v \quad \|v\|=1$ $\quad$ supponiamo $\exists \ \frac{\partial f}{\partial v}(x) \quad \forall x \in A$

$\frac{\partial f}{\partial v} : A \to \mathbb{R}$ è una funzione; sia $w \in \mathbb{R}^n$ $\|w\|=1$ richiediamo

se la funzione $\frac{\partial f}{\partial v}$ è derivabile lungo la direzione w in un punto x^0.

Se questo accade diremo che la derivata $\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)(x^0)$

$\frac{\partial}{\partial w} \frac{\partial}{\partial v} f(x^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial v}(x^0)$ è la derivata direzionale seconda di f in x^0 nelle direzioni v e w

$$\frac{\partial^2 f}{\partial w \, \partial v}(x_0) = \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial}{\partial v} f\right)(x_0)$$

se $v = e_i$ $\quad w = e_k$ si parlerà di derivata parziale seconda in x_i e x_k

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \, \partial x_i}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right)(x_0)$$

Si procede poi a definire le derivate di ogni ordine

$N = 3$

3 derivate parziali prime $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$ $\frac{\partial f}{\partial z}$

9 derivate seconde

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z} \end{pmatrix}$$

derivate "miste"

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ y^2 z^2

3^k derivate di ordine k

N^k

27 derivate terze

$$f(x,y,z) = x^2 y\, 2^z$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy\,2^z \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2\, 2^z \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = x^2 y\, 2^z \log 2$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y\,2^z & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = 2x\,2^z & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} = 2xy\,2^z \log 2 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 2x\,2^z & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} = x^2\, 2^z \log 2 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} = 2xy\,2^z \log 2 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} = x^2\, 2^z \log 2 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = x^2 y\, 2^z (\log 2)^2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \stackrel{?}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}$$

È vero in generale?

Es:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)^T \neq (0,0)^T \\ 0 & \text{se } (x,y)^T = (0,0)^T \end{cases}$$

se $(x,y)^T \neq (0,0)^T$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xy^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^5/t^4}{t} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

$(x,y)^T \neq (0,0)^T$

⚠ In generale può essere $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x^0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(x^0)$

<u>Teorema di Schwarz</u> (sull'inversione dell'ordine di derivazione)

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $x^0 \in A$, $f: A \to \mathbb{R}$, $k \geq 2$. Siano definite in A tutte le derivate parziali di ogni ordine $\leq k$ rispetto a tutte le variabili, e queste siano continue in x^0.

Allora tutte le derivate parziali che differiscono tra loro solo per l'ordine di derivazione sono uguali tra loro.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(x^0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j}(x^0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k} \ldots$$

Funzioni due volte differenziabili

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo scalare differenziabile. Allora è definito

$\nabla f : A \to \mathbb{R}^n$ campo vettoriale.

Se ∇f è differenziabile in $x^0 \in A$, diremo che la f è 2 volte differenziabile in x^0. La matrice Jacobiana di ∇f si dice Hessiana di f

$J(\nabla f)(x^0) = Hf(x^0)$ e si può dimostrare che è una matrice simmetrica [Teorema di Young].

$$J(\nabla f)$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \right)^T$$

$$J(\nabla f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_2} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N} & & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2} \end{pmatrix}$$

$$\| $$

$$Hf$$

$$\boxed{Hf(x)^T = Hf(x)}$$

$\varphi(x) = \langle Ax, x \rangle$ si dice forma quadratica $\boxed{A = A^T}$

$\varphi(x,y) = \langle Ax, y \rangle$ si dice forma bilineare

$\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\varphi(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha \varphi(x_1, y) + \beta \varphi(x_2, y)$$

$$\varphi(x, \gamma y_1 + \delta y_2) = \gamma \varphi(x, y_1) + \delta \varphi(x, y_2)$$

Diremo differenziale secondo di f in x^0 la forma bilineare

$\varphi(x,y) = \langle Hf(x^0)\,x, y \rangle$ o la forma quadratica associata $\varphi(x,x)$

<u>OSS</u>: se f è 2 volte differenziabile, si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial w \partial v}(x_0) = \langle Hf(x_0)v, w \rangle = \langle v, Hf(x_0)^T w \rangle$$

$$= \langle v, Hf(x_0) w \rangle$$

$$\|$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w}(x_0) \qquad\qquad = \langle Hf(x_0) w, v \rangle$$