$\forall n \in \mathbb{N}^+ \quad f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \boxed{f_n(t) = \frac{1}{n+(t-n)^4}} \quad (f_n)_n$

$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = 0 \quad \forall t$ (puntuale)

uniforme? $\left| \frac{1}{n+(t-n)^4} \right| \le \frac{1}{n}$ non dipende da t $\to 0$

$\Rightarrow$ la convergenza è uniforme

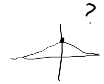
$\boxed{\sum f_n(t) \text{ puntuale}}$? uniforme su $[-1,1]$?

$\boxed{t \in \mathbb{R} \text{ fissato}} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+(n-t)^4}$

$$\frac{\frac{1}{n+(n-t)^4}}{\frac{1}{n^4}} = \frac{\cancel{n^4}}{\cancel{n^4}\left[\frac{1}{n^3}+\left(1-\frac{t}{n}\right)^4\right]} \to 1$$

$\boxed{\frac{1}{n+(t-n)^4}}$ fissato n considero $f_n(t) = \frac{1}{n+(t-n)^4}$?

$t=0 \quad \frac{1}{n+n^4} \qquad t \to +\infty \quad \to 0$



convergenza uniforme?

$f_n(n) = \frac{1}{n}$

Test di Weierstraß

$|f_n(t)| \le K_n \quad \forall t \qquad K_n \geq \frac{1}{n}$

Ho il sospetto che la convergenza non sia uniforme su $\mathbb{R}$

$\sum \frac{1}{n+(t-n)^4} \qquad [-1,1]$

$\frac{1}{n+(t-n)^4} \le K_n \qquad \forall t \in [-1,1] \qquad n > 1 \quad -1 \le t \le 1$

$\frac{d}{dt}\left[n+(t-n)^4\right]^{-1} = -1\left[n+(t-n)^4\right]^{-2} \cdot 4\underbrace{(t-n)^3}_{<(1-n)^3} > 0$ su $[-1,1]$

max in $t=1 \qquad \forall t \in [-1,1]$

$\boxed{\frac{1}{n+(t-n)^4} \le \frac{1}{n+(n-1)^4}}$ non dipende da t

$\sum \frac{1}{n+(n-1)^4}$ converge ✓

$\cancel{n+}(n-1)^4 \overset{?}{\le} \cancel{n+}\underbrace{(t-n)^4}_{(n-t)^4} \quad \Leftarrow \quad (n-1) \le (n-t)$

$t \le 1$

$$d^2 f(x_0) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad d^2 f(x_0)(v, w) = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w}(x_0)$$

Dim Per definizione $d^2 f(x_0) = d(\nabla f)(x_0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w}(x_0) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)(x_0) = \frac{\partial}{\partial v}\varphi(x_0) = \langle \nabla\varphi(x_0), v \rangle = \langle \underbrace{J(\nabla f)(x_0)^T}_{\parallel\ \langle Hf(x_0)\, w,\, v\rangle} \cdot w, v \rangle$$

$$\llcorner\ \frac{\partial f}{\partial w}(x) = \underbrace{\boxed{\langle \overbrace{\nabla f(x)}^{h(x)}, w \rangle}}_{\varphi(x)} \qquad \nabla\varphi = Jh^T \cdot w$$

$$= \langle Hf(x_0)\, w, v \rangle$$

$$\nabla\left(\langle h(x), w \rangle\right) = Jh(x)^T \cdot w$$

Ho dimostrato che $\dfrac{\partial^2 f}{\partial v \partial w}(x_0) = \langle Hf(x_0)\, v, w \rangle$

$$= d^2 f(x_0)(v, w)$$

$d^3 f(x_0) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$d^3 f(x_0)(v, u, w) = \frac{\partial^3 f}{\partial w \partial u \partial v}(x_0) \quad \ldots$$

$\underline{d^2 f(x_0)(u,u)}$ è una forma quadratica $\varphi(u) = d^2 f(x_0)(u,u)$

$\langle Hf(x_0)\, u, u \rangle$

$n = 2$

$\varphi(x,y) = \underbrace{a_{11} x^2 + 2\, a_{12}\, xy + a_{22}\, y^2}$

$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

polin. omogeneo di grado 3

$d^3 f(x_0)(u,u,u)$ $\varphi(x,y) = a_{30} x^3 + 3\, a_{21} x^2 y + 3\, a_{12}\, x y^2 + a_{03} y^3$

$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

Approssimante di ordine k di un campo scalare f $[k=2]$

Se esiste un polinomio di grado $\leq k$ P_k tale che

$$P_k(x_0) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_k(x)}{\| x - x_0 \|^k} = 0$$

Allora P_k si dice approssimante di ordine k di f in x_0

Teorema $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 2 volte differenziabile in $x^0 \in A$.
Allora esiste l'approssimante di ordine 2 di f in x^0, P_2, e si ha

$$P_2(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} d^2 f(x_0)(x - x_0, x - x_0)$$

$$= f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(x_0)(x - x_0), x - x_0 \rangle$$

$n = 1$

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

Dimostriamo che $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{\|x-x_0\|^2} \left[f(x) - P_2(x) \right] = 0$

Sia $\boxed{g(x) = f(x) - P_2(x)}$ $\qquad g(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$

$$g(x) = g(x) - g(x_0) = \langle \nabla g(\xi), x - x_0 \rangle$$ con $\xi \in$ segmento $[x, x_0]$

$$\nabla g(x) = \nabla f(x) - \nabla P_2(x) = \nabla f(x) - \nabla \left[\underbrace{f(x_0)}_{\text{cost.}} + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(x_0)(x-x_0), x - x_0 \rangle \right]$$

$$= \nabla f(x) - \nabla f(x_0) - \frac{1}{2} 2 \, Hf(x_0)(x - x_0)$$

ξ $\qquad$ ξ

$$\nabla(\langle v, x \rangle) = \frac{1}{2} \nabla \langle Ax, x \rangle$$

$$g(x) = \langle \nabla g(\xi), x - x_0 \rangle = \langle \underbrace{\nabla f(\xi) - \nabla f(x_0)} - Hf(x_0)(\xi - x_0), x - x_0 \rangle = *$$

h diff.bile

$$h(\xi) - h(x_0) = dh(x_0)(\xi - x_0) + o(\|\xi - x_0\|)$$

$$\nabla f(\xi) - \nabla f(x_0) = d(\nabla f)(x_0)(\xi - x_0) + o(\|\xi - x_0\|)$$

$$d(\nabla f)(x_0)(\xi - x_0) = Hf(x_0)(\xi - x_0)$$

$$* = \langle \cancel{Hf(x_0)(\xi - x_0)} + o(\|\xi - x_0\|) - \cancel{Hf(x_0)(\xi - x_0)}, x - x_0 \rangle =$$

$$= \langle o(\|\xi - x_0\|), x - x_0 \rangle$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{\|x-x_0\|^2} \overset{?}{=} 0$$

$$\left| \frac{g(x)}{\|x-x_0\|^2} \right| = \frac{\left| \langle \sigma(\|\xi-x_0\|), x-x_0 \rangle \right|}{\|x-x_0\|^2} \leq \frac{\|\sigma(\|\xi-x_0\|)\| \, \cancel{\|x-x_0\|}}{\|x-x_0\|^{\cancel{2}}}$$

$$= \left\| \frac{\sigma(\|\xi-x_0\|)}{\|x-x_0\|} \right\| = \left\| \frac{\sigma(\|\xi-x_0\|)}{\|\xi-x_0\|} \cdot \overbrace{\frac{\|\xi-x_0\|}{\|x-x_0\|}}^{<1} \right\| < \left\| \frac{\sigma(\|\xi-x_0\|)}{\|\xi-x_0\|} \right\| \to 0$$

Teorema

Se $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ha tutte le derivate parziali prime e seconde continue in $x_0 \in A$, allora f è 2 volte differenziabile in x_0

Dim: applico il teorema del differenziale totale alla funzione ∇f.

Si dice che f è di classe C^k $\quad f \in C^k(A, \mathbb{R})$ se ha derivate parziali continue fino all'ordine k.

Ottimizzazione di campi scalari

$f: E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad x^0 \in E$ si dice punto di $\overset{\text{minimo}}{\text{massimo}}$ per f se

$f(x^0) = \overset{\min}{\max\limits_E} f$, cioè se $\forall x \in E \quad f(x) \overset{\geq}{\leq} f(x^0)$

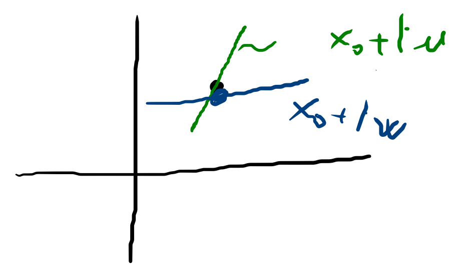
x_0 è punto di massimo/minimo relativo per f se esiste un intorno U di x_0 tale che x_0 è di massimo/minimo per $f|_{E \cap U}$, cioè

$f(x) \overset{\geq}{\leq} f(x_0) \quad \forall x \in E \cap U$

$x^0 \in$ $\overset{A}{\cancel{E}}$ aperto si dice un punto di sella per f se esistono due direzioni u, w di $\mathbb{R}^n$ tali che

la funzione $\varphi(t) = f(x_0 + t u)$ ammette in $t=0$ un punto di minimo

mentre la funzione $\psi(t) = f(x_0 + t w)$ ammette in $t=0$ un punto di massimo



restrizioni di f alle direzioni u e w

Teorema di Fermat (Test del gradiente)

$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ A aperto, $x^0 \in A$ punto di massimo o minimo per f

Supponiamo che esista $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$. Allora $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$.

In particolare, se f è differenziabile si ha $\nabla f(x_0) = \bar{0}$.

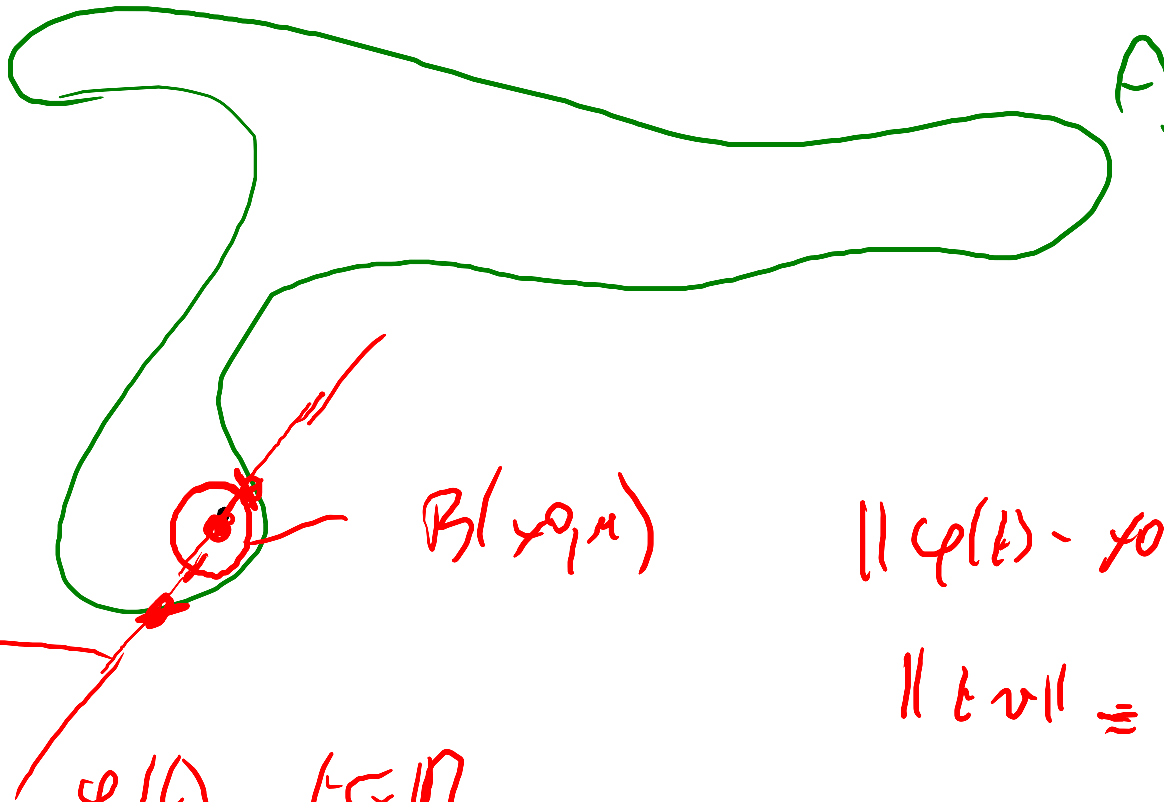
Def Sia x^0 punto di $\overset{\text{massimo}}{\text{minimo}}$. Allora $f(x) \overset{\le}{\ge} f(x_0) \quad \forall x \in A$.

Consideriamo i punti del segmento $x^0 + tv$ contenuto in A $(t \in \,]-\delta, \delta[\,)$.

Allora la funzione $\varphi(t) = f(x_0 + tv)$ ha in $t = 0$ un punto di $\overset{\text{massimo}}{\text{minimo}}$

$[\varphi(t) \ge \varphi(0) \quad \forall t \in \,]-\delta, \delta[\,]$ Quindi $\varphi'(0) = 0$

$$\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$$



$\varphi(t) = x_0 + t v$

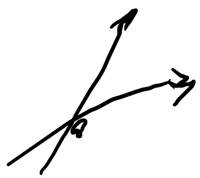
$\|\varphi(t) - x_0\| < r$

$\|t v\| = |t| < r$

$\|v\| = 1$

Diremo punto critico di f un punto $x_0 \in A$ dove $\nabla f(x_0) = \vec{0}$

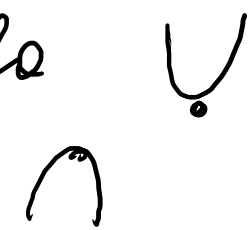
⚠ Un punto di sella è un punto critico?



Es 10

Vero in $\mathbb{R}^2$

Es: $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z$ $\quad (0,0,0)^T$ è punto di sella



$$\nabla f(0,0,0) = (0,0,1)^T$$

Esercizio $f(x,y) = 3x^2 + y^2 - x^3 y$ $\qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

cerchiamo eventuali punti di massimo/minimo/sella:

$\nabla f(x,y) = (6x - 3x^2 y,\ 2y - x^3)^T \qquad \nabla f(x,y) = (0,0)^T$

$$\begin{cases} 6x - 3x^2 y = 0 \\ 2y - x^3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x(2 - xy) = 0 \\ y = \frac{1}{2}x^3 \end{cases}$$

$x = 0$ $\quad y = 0 \quad (0,0)^T$

$x \neq 0 \quad xy = 2 \quad y = \frac{2}{x}$

$\frac{2}{x} = \frac{1}{2}x^3 \qquad x^4 = 4 \qquad x = \pm\sqrt{2}$

$x = -\sqrt{2} \quad y = \frac{2}{-\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

$x = \sqrt{2} \quad y = \sqrt{2}$

$(0,0)^T \qquad (-\sqrt{2},-\sqrt{2})^T \qquad (\sqrt{2},\sqrt{2})^T \qquad f = 3x^2 + y^2 - x^3 y$

? $f(0,0) = 0$ $\qquad xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \qquad -xy \geq -\frac{1}{2}(x^2+y^2)$

$$-x^3 y \geq -\frac{1}{2}(x^2+y^2)\,x^2$$

$f(x,y) = 3x^2 + y^2 - x^3 y \geq$ $\qquad [x^2 \geq 0]$

$$\geq 3x^2 + y^2 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)\underbrace{x^2}_{\leq 1} \geq 3x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 = \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \geq 0$$

$(0,0)^T$ è punto di minimo se $|x| \leq 1$ $\quad |x|^2 \leq 1$

Forme quadratiche: $\boxed{\text{segno}}$

Segno (segnatura) di una forma quadratica

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad \varphi(x) = \langle Ax, x \rangle \quad A = A^T$

φ si dice definita-positiva se $\varphi(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad x \neq 0$

definita-negativa se $\varphi(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad x \neq 0$

indefinita se esistono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\varphi(x_1) < 0 < \varphi(x_2)$

Es

$\varphi(x,y) = x^2+y^2$ def. pos.

$= -x^2-y^2$ def. neg.

$= xy$ $\varphi(1,1)>0$ $\varphi(1,-1)<0$ indefinito

$\varphi(x,y) = \underbrace{x^2-2xy+y^2} = (x-y)^2 \geq 0$

$\varphi(1,1)=0$ $(1,1)^t \neq (0,0)^t$

NON è definito positivo

NON è definito negativo

NON è indefinito

Test del differenziale secondo (per lo studio dei punti critici)

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $x^0 \in A$, f due volte differenziabile in x^0; $\nabla f(x^0) = \overline{0}$. Allora, posto $\varphi(v) = d^2 f(x^0)(v,v) = \langle Hf(x^0)v, v \rangle$ si ha che:

1) se φ è definita positiva, allora x^0 è punto di minimo relativo
2) se φ è definita negativa, allora x^0 è punto di massimo relativo
3) se φ è indefinita, allora x^0 è punto di sella

$$f(x,y) = 3x^2 + y^2 - x^3 y \qquad \nabla f(x,y) = \left(6x - 3x^2 y,\ 2y - x^3\right)^T$$

$$\boxed{(0,0)^T} \qquad (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})^T \qquad (\sqrt{2}, \sqrt{2})^T$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6 - 6xy & -3x^2 \\ -3x^2 & 2 \end{pmatrix} \qquad Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$\varphi(x,y) = 6x^2 + 2y^2$ definito positivo $(0,0)^T$ punto di minimo

$\varphi(x,y) = \underbrace{-6x^2 - 12xy + 2y^2}$ $\qquad \varphi(1,0) = -6 < 0 \qquad \varphi(0,1) = 2 > 0$

indefinito

$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})^T$ e $(\sqrt{2}, \sqrt{2})^T$ sono punti di sella.

Proprietà delle forme quadratiche

1) Sia $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma quadratica $\varphi(x) = \langle Ax, x \rangle$ $A = A^T$

Allora $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\varphi(\alpha x) = \alpha^2 \varphi(x)$

$$\left[\varphi(\alpha x) = \langle A(\alpha x), \alpha x \rangle = \langle \alpha Ax, \alpha x \rangle = \alpha \langle Ax, \alpha x \rangle = \alpha^2 \langle Ax, x \rangle = \alpha^2 \varphi(x) \right]$$

2) Sia φ definita positiva. Allora esiste $m > 0$ tale che

$\varphi(x) \geq m \|x\|^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\boxed{\varphi(x) \geq m \|x\|^2}$$

se $x = 0$ OK $0 \geq 0$.

sia $x \neq 0$ considero $v = \dfrac{x}{\|x\|}$ $\quad \|v\| = 1$.

Considero la funzione <u>φ ristretta alla sfera unitaria</u>

<u>$S(0,1)$</u> $= \{ v \in \mathbb{R}^n : \|v\| = 1 \}$ <u>$S(0,1)$ è compatto</u>

φ è continua; per Weierstrass esiste $\min\limits_{x \in S(0,1)} \varphi(x) = m$

$m > 0$ $\quad m = \min\limits_{x \in S(0,1)} \varphi(x) = \varphi(x_0) > 0$

perché $x_0 \neq 0$

$$m = \min \{ \varphi(v) : \|v\| = 1 \} > 0$$

$$m \leq \varphi(v) \quad \forall v \quad \|v\| = 1$$

$$\forall x \neq 0 \quad v = \frac{x}{\|x\|} \quad \|v\| = 1$$

$$m \leq \varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{1}{\|x\|^2} \varphi(x)$$

$$\boxed{\varphi(x) \geq m \|x\|^2}$$

Dimostrazione del test del differenziale secondo

Supponiamo φ definito positivo; proviamo che x_0 è punto di minimo

$$f(x)-f(x_0) = \underbrace{\langle \nabla f(x_0), x-x_0\rangle}_{=0} + \frac{1}{2}\varphi(x-x_0) + o(\|x-x_0\|^2) =$$

$$\varphi(x-x_0) = \langle Hf(x_0)(x-x_0), x-x_0\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\varphi(x-x_0)}_{\geq m\cdot\|x-x_0\|^2} + \underbrace{o(\|x-x_0\|^2)}_{=\eta(x)\|x-x_0\|^2} \quad \text{con } \lim_{x\to x_0}\eta(x)=0$$

$$\left[\eta(x) = \frac{o(\|x-x_0\|^2)}{\|x-x_0\|^2}\right]$$

$$\underline{f(x)-f(x_0)} \geq \frac{1}{2}m\|x-x_0\|^2 + \eta(x)\|x-x_0\|^2 = \Big(\underbrace{\frac{1}{2}m+\eta(x)}_{>0 \text{ se } x\in U_{x_0} \text{ intorno opportuno di } x_0}\Big)\|x-x_0\|^2 > 0 \quad \forall x\in U,\ x\neq x_0$$

$m > 0$, $\quad \lim_{x\to x_0}\eta(x)=0$

φ definito negativo : simmetrico

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}\varphi(x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \le \left(-\frac{1}{2} m + \eta(x)\right)\|x - x_0\|^2 < 0$$

$\eta(x)\|x - x_0\|^2$ $\qquad \to 0$

< 0 se $x \in U_{x_0}$

φ definito negativo .

$\exists\, m > 0$: $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi(x) \le -m\|x\|^2$$

Sia ora φ indefinita; allora esistono $u, w \in \mathbb{R}^n$ tali che

$\varphi(u) < 0 < \varphi(w)$

Si può supporre $\|u\| = \|w\| = 1$ $\quad \left[\varphi\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{1}{\|u\|} \varphi(u) \right]$

Studiamo $f(x^0 + t \overset{w}{u}) = \sigma(t)$

$\sigma'(0) = \frac{\partial f}{\partial u \, w}(x^0) = 0 \qquad 0$ è punto critico per σ

$\sigma''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2_{w}}(x^0) = \underset{\varphi(w)}{\varphi(u)} \underset{>0}{<0} \Rightarrow 0$ è punto di massimo per σ

Come riconoscere il segno di una forma quadratica?

$A = A^T$ A è diagonalizzabile $A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

Tutti gli autovalori positivi $\rightsquigarrow$ definita positiva

negativi $\rightsquigarrow$ negativa

Autovalori di segni discordi $\rightsquigarrow$ indefinita

⚠ Es

$$f(x,y) = -(x^4+y^4) \qquad x^4 - y^4$$

$$\nabla f(x,y) = -4\,(x^3, y^3)^T \qquad 4\,(x^3, -y^3)^T$$

$$Hf(x,y) = 12 \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & -y^2 \end{pmatrix}$$

punto critico $(0,0)^T$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \varphi \equiv 0$$

$\varphi \equiv 0$

$\varphi \equiv 0$

$(0,0)^T$ punto di minimo

$(0,0)^T$ " " massimo

$(0,0)^T$ " di sella $\quad f = x^4 - y^4$