Category theory

Mac Lane Eilenberg

linguaggio

Grothendieck KAN

1970 LAWVERE

Mac Lane - Categories for the Working Mathematicians

F. Borceux Handbook of Categorical Algebra

3 volume

Adamek Rosicky

Barr Wells

PRODOTTO

> prodotto cartesiano di X e Y

insieme

$$X \times Y = \{ (x, y)\ x \in X,\ y \in Y \}$$

> prodotto di GRUPPI

$G \times H = \{ (g, h) \ldots \}$ con una struttura prodotto di gruppi

gruppo prodotto

$\boxed{G \times H}$

$$(g, h) \underset{G\times H}{\circ} (\bar{g}, \bar{h}) \stackrel{def}{=} (g \cdot_G \bar{g}, \; h \cdot_H \bar{h})$$

$$1 = (1_G, 1_H)$$

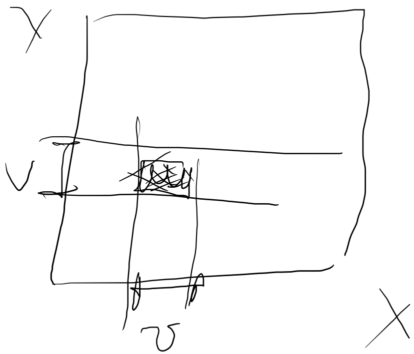
$$(g, h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$$

prodotto di spazi topologici

X, Y sp. top. $X \times Y$ prodotto topologico

$\underline{X \times Y} = \{ (x, y) \; — \}$

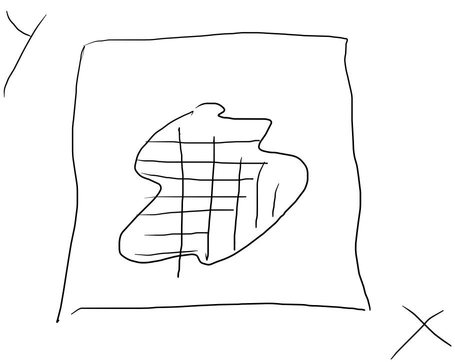
definiamo la topologia prodotto



top. separata continua

$S \subseteq X \times Y$ aperto se

$\forall$ sezione verticale o orizzontale queste sono aperte in Y / in X



Cerco una UNICA definizione
che catturi tutti 3 i casi

X, Y oggetti

cos'è il prodotto $X \times Y$?

$$\begin{tikzcd}
 & X \\
X \times Y \arrow[ur, "p_X"] \arrow[dr, "p_Y"'] & \\
 & Y
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & G \\ G\times H \arrow[ur, "p_G"] \arrow[dr, "p_H"'] & \\ & H \end{tikzcd}$$

p_G, p_H sono omomorfismi di gruppi

<u>topologia</u>

$$\begin{tikzcd} & X \\ X\times Y \arrow[ur, "p_X"] \arrow[dr, "p_Y"'] & \\ & Y \end{tikzcd}$$

p_X, p_Y sono f. continue

definizione "UNIVERSALE"

$$\begin{tikzcd}
 & & X \\
T \arrow[r, dashed, "\exists ! \varphi ?"] \arrow[urr, bend left, "t_X"] \arrow[drr, bend right, "t_Y"'] & X \times Y \arrow[ur, "p_X"] \arrow[dr, "p_Y"'] & \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

t che vale la proprietà

$\forall T,\ t_X : T \to X,\ t_Y\ T \to Y$

$\exists !\ \varphi : T \to X \times Y : \ t_X = p_X \circ \varphi \quad t_Y = p_Y \circ \varphi$

$$
\begin{tikzcd}
 & & X \\
X \times Y \arrow[urr, "p_X"] \arrow[rr, "p_Y"] & & Y \\
T \arrow[u, "\varphi"] \arrow[uurr, "t_X"] \arrow[urr, "t_Y"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Set

Grp

$$\varphi(\xi) \overset{def}{=} \left(t_X(\xi), t_Y(\xi) \right) \quad \forall \xi \in T$$

$t_X = p_X \cdot \varphi$

è UNICA

X Grp $\qquad$ φ è un omomorfismo

Top $\qquad$ φ diventa una funzione continua

$$
\begin{tikzcd}
 & & X \\
X \times Y \arrow[urr, "p_X"] \arrow[drr, "p_Y"'] & & \\
 & & Y \\
X \otimes Y \arrow[uu, "\exists ! \varphi"] \arrow[uuurr] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}
$$

s.c.

Top

p_X, p_Y funzioni continue

ASTRATTO

$(X, \le)$ $\le$ preordine

<u>def</u> $x \to y$ <u>se</u> $x \le y$

$x, y \in X$

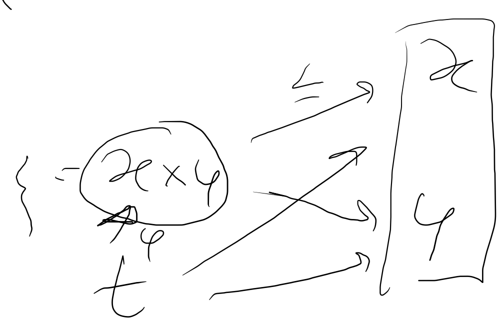
<u>prodotto</u>?

$x \times y$

<u>$\exists\, \xi$ con</u>

$\xi \le x$

$\xi \le y$



$x \times y = \inf(x, y)$

$\forall t \quad \boxed{t \le x \quad t \le y} \Rightarrow \exists!\, \varphi : t \to x \times y$ $\quad \boxed{t \le \xi}$ $\quad t \le x \times y$

Def Una categoria $\mathcal{C}$ è data

collezione di $\underline{\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} = \{X, Y, T \dots\}$

collezione di MORFISMI o FRECCE

$\boxed{f : X \longrightarrow Y}$ $\qquad \underline{\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}} = \{f, f : X \longrightarrow Y\}$

ASSIOMI: i morfismi sono componibili in maniera ASSOCIATIVA con UNITÀ

COMPOSIZIONE

$\forall\, f, g$ t.c. $f: X \to Y$

$g: Y \to T$

pred $\boxed{\mathrm{cod}\, f = \mathrm{dom}\, g}$

$\exists$ un morfismo composto

$g \circ f = X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} T$

$\mathrm{dom}(gf) = \mathrm{dom}\, f$

$\mathrm{cod}(gf) = \mathrm{cod}\, g$

la composiz è ASSOCIATIVA

$\forall\ f\ g\ h$ componibili

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gf"'] \arrow[rrr, bend right=60] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "hg"] & T \arrow[r, "h"] & V
\end{tikzcd}
$$

$h \cdot (gf)$

$$\boxed{h(gf) = (hg)f}$$

<u>identità</u> : $\forall X \in \mathrm{Ogg}\,\mathcal{C}$

$\exists$ il morfismo identità

$1_X : X \longrightarrow X$ t.c.

$\forall f : X \longrightarrow Y$

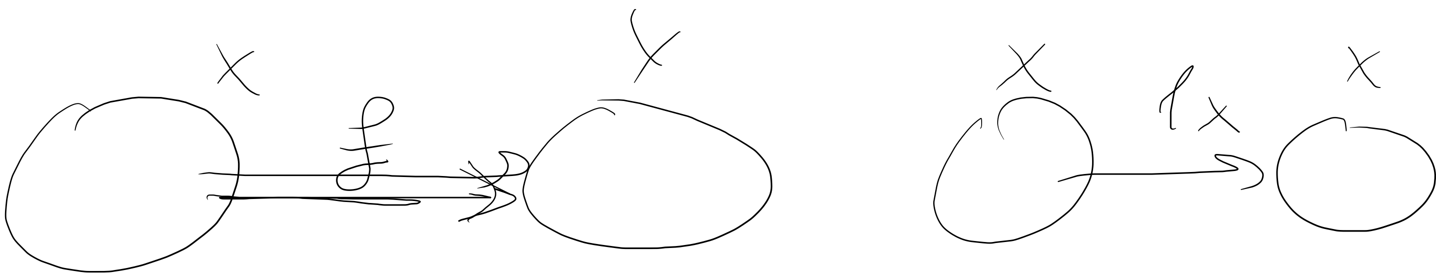
$$\boxed{\begin{aligned} f \cdot 1_X &= f \\ 1_Y \cdot f &= f \end{aligned}}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1_X"'] \arrow[rr, bend left, "f \cdot 1_X"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "1_Y f"'] & Y \arrow[r, "1_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Ex

Set — oggetti insiemi

Set — morfismi funzioni



Grp : ogg : gruppi
morf : omomorfismi

Anl : anelli
omom. di anelli

Top : sp. topologici
funzioni continue

esempi
CONCRETI

Lett

- Ogg RETICOLI
- Morf : funzioni che preservano sup e inf

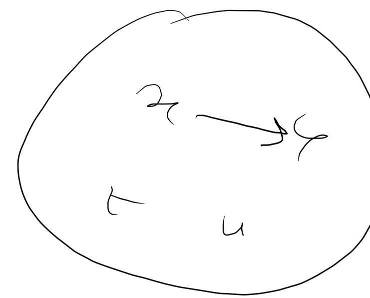
$$\mathrm{Top} \xrightarrow{H} \mathrm{Ab}$$

ESEMPI ASTRATTI

1. $A = (X, \leq)$ preord. $(\leq \mid \boxed{\text{ogg, homset}})$

lo penso come categoria.

A < ogg. sono elementi di X ; morfismi



$\exists$ un morf. da x ad y se $x \leq y$ $\Updownarrow$

$x \xrightarrow{\leq} y \xrightarrow{\leq} t$, $\quad x \xrightarrow{\leq} t$ $\qquad x \xrightarrow{\leq} x$

categ di MATRICI

$\mathcal{M}$

- ogg: numeri interi positivi $n, m, \dots$
- morf: matrici $n \times m$ sui reali

$n \xrightarrow{1_n} n$

1_n è la matrice DIAGONALE

$$\begin{tikzcd} n \arrow[r, "A_{n\times m}"] \arrow[rr, bend right, "A * B"'] & m \arrow[r, "B_{m\times h}"] & h \end{tikzcd}$$

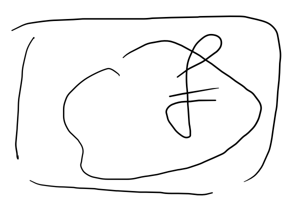
le matrici si compongono in modo ASSOCIATIVO categorie di **RELAZIONI**

Rel
- ogg: insiemi
- morf: relazioni

$$X \xrightarrow{f} Y$$

ins.   ins

f è una relazione di $X \times Y$



è uno cole

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f", "R"'] \arrow[rr, bend right] & Y \arrow[r, "g", "S"'] & T \end{tikzcd}$$

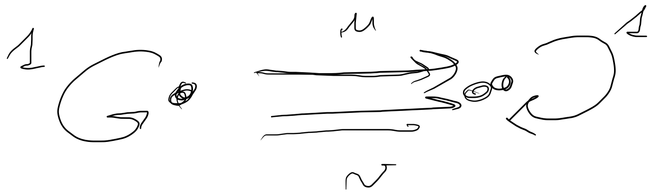
$gf = R * S$ composta di relazioni

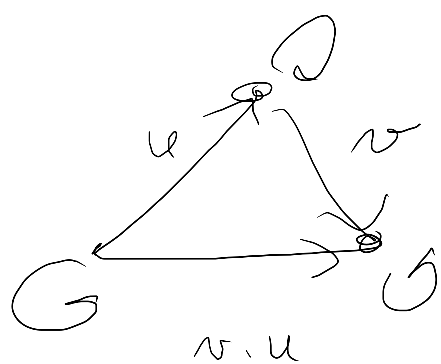
$R \subseteq X \times Y \qquad S \subseteq Y \times T$

$R * S \subseteq X \times T$

$x \, R*S \, t \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists y \in Y$ con $x R y$ e $y S t$

GRAFI





$\mathcal{C}$

$\boxed{\text{ogg}}$

$\boxed{\text{morf}}$

<u>naive set theory</u> $S=\{x\in\mathbb{R},\ x\geq 0\}$

$S=\{x\in\mathbb{N}\ \ x \text{ è pari}\}$

paradosso di Russel

$$A = \left\{ X \text{ insieme},\ X \notin X \right\}$$

$A \in A \Rightarrow A \notin A$ contraddizione

$A \notin A \rightarrow A \in A$

instance field | instance

instance method | class

obj Sms usa class

null Sms usa class

$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$

$$\mathcal{C}(X,Y) = \{ f \text{ morf} : f : X \to Y \}$$

$\shortparallel$

$\hom(X,Y)$ Sono **unici**

$$\mathcal{C}(X,Y) \circ \mathcal{C}(Y,Z) = \mathcal{C}(X,Z)$$

è una FUNZIONE

Corso

linguaggio categoriale

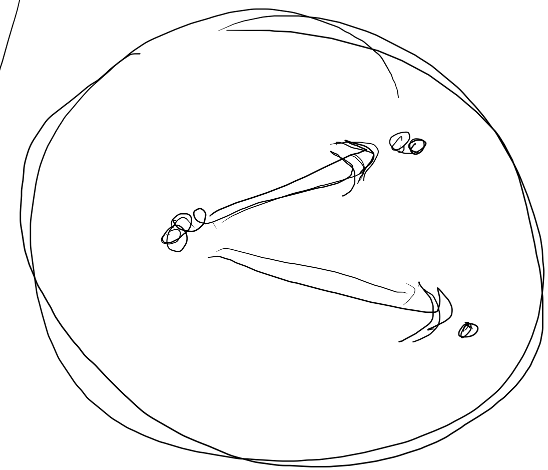
Categ

sotto categ

FUNTORI

$A \longrightarrow B$

Proprietà di morfismi ed oggetti in una categ



funtori AGGIUNTI

Categorie algebriche