n **Teor** $u_0 \in V(\mathbb{R}^3)$ e sia $u \in L^\infty([0,T], V)$ e $\nabla^2 u \in L^2((0,T), L^2)$ la soluzione vista la volta scorsa. Sia $v$ una soluzione debole con dato iniziale $u_0$, ~~cioè~~ una soluzione di Leray. Allora $u = v$ in $[0,T]$.

Inoltre, se $[0, T^*)$ è il massimo intervallo di esistenza della soluzione regolare e se $T^* < +\infty$ allora $\lim_{t \to T^*} |\nabla u(t)|_{L^2} = +\infty$

Dim. Sappiamo che vale $v \in L^2((0,T), H)$

$\Delta u \in L^2((0,T), L^2)$

$$\int_0^t \left( \langle \partial_t u, v \rangle + \nu \langle \nabla u, \nabla v \rangle + \langle \operatorname{div}(u \otimes u), v \rangle \right) dt' = 0$$

Inoltre è possibile utilizzare $u$ come funzione test per $v$.

$$\int_0^t \left( \nu \langle \nabla v, \nabla u \rangle - \langle v, \partial_t u \rangle + \langle \operatorname{div}(v \otimes v), u \rangle \right) dt' = |u_0|_{L^2}^2 - \langle v(t), u(t) \rangle$$

$$\int_0^t \left( 2\nu \langle \nabla v, \nabla u \rangle + \langle \operatorname{div}(u \otimes u), v \rangle + \langle \operatorname{div}(v \otimes v), u \rangle \right) dt = |u_0|_{L^2}^2 - \langle v(t), u(t) \rangle$$

$w = v - u$

$$-\int_0^t \left(2\nu\langle\nabla v,\nabla u\rangle + \langle \mathrm{div}(u\otimes u), v\rangle + \langle \mathrm{div}(v\otimes v), u\rangle\right) dt = |u_0|^2_{L^2} + \langle v(t), u(t)\rangle$$

$$2\langle\nabla v,\nabla u\rangle = |\nabla u|^2_{L^2} + |\nabla v|^2_{L^2} - |\nabla w|^2_{L^2} \qquad (a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$$

$$\langle u,v\rangle = \frac12|u|^2_{L^2}+\frac12|v|^2_{L^2}-\frac12|w|^2_{L^2}$$

$$\langle \mathrm{div}(u\otimes u),v\rangle + \langle\mathrm{div}(v\otimes v),u\rangle = \langle \mathrm{div}(w\otimes w),u\rangle \qquad (*)$$

$$\frac12|w(t)|^2_{L^2} + \int_0^t\left(\nu|\nabla w|^2_{L^2} - \langle\mathrm{div}(w\otimes w),u\rangle\right)dt' =$$

$$= \frac12|u(t)|^2_{L^2} + \int_0^t\nu|\nabla u|^2_{L^2} - \frac12|u_0|^2_{L^2} \qquad (=0)$$

$$+\frac12|v(t)|^2_{L^2} + \int_0^t \nu|\nabla v|^2_{L^2} - \frac12|u_0|^2_{L^2} \qquad (\le 0)$$

$$\le 0$$

$$|w(t)|^2_{L^2} + \cancel{2}\nu\int_0^t|\nabla w|^2_{L^2}\,dt' \le 2\int_0^t\langle\mathrm{div}(w\otimes w),u\rangle\,dt'$$

$$\le 2\int_0^t |u|_{L^\infty}|\nabla w|_{L^2}|w|_{L^2}\,dt'$$

$$\lesssim 2\int_0^t |u|_{H^2}|\nabla w|_{L^2}|w|_{L^2}\,dt \qquad 2\frac{a}{\lambda}b\lambda \le \frac{a^2}{\lambda^2}+b^2\lambda^2$$

$$\le \frac{1}{\nu}\int_0^t |u|^2_{H^2}|w|^2_{L^2}\,dt' + \cancel{\nu\int_0^t|\nabla w|^2_{L^2}\,dt}$$

$$|w(t)|^2_{L^2} + \gamma \int_0^t |\nabla w|^2_{L^2}\, dt' \le \frac{1}{\gamma} \int_0^t |u|^2_{H^2} |w|^2_{L^2}\, dt'$$

$$|w(t)|^2_{L^2} \le \frac{1}{\gamma} \int_0^t |u|^2_{H^2} |w|^2_{L^2}\, dt'$$

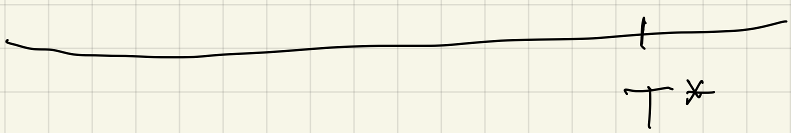
$$|w(t)|^2_{L^2} \le e^{\frac{1}{\gamma}\int_0^T |u|^2_{H^2}\, dt'} \underbrace{|w(0)|^2_{L^2}}_{0}$$

per $t \in [0,T]$

---

Supponiamo che $T^* < \infty$ e supponiamo per assurdo che non ci sia blow up. Allora $\exists$ $t_n \nearrow T^*$ ed una $C > 0$ t.c.

$$|\nabla u(t_n)|^4_{L^2} < C$$

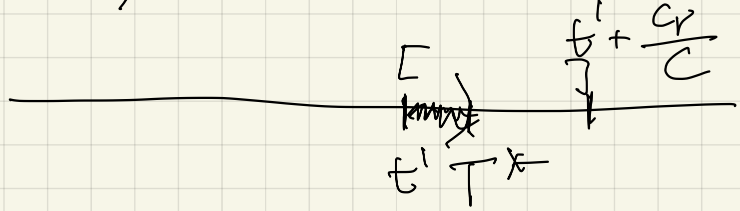



Quindi in particolare $\exists$ $0 < t' < T^*$ con

$$T^* - t' < \frac{c_\gamma}{C} \quad \text{e con} \quad |\nabla u(t')|^4_{L^2} < C.$$

Sia ora $v$ la soluzione regolare con dato iniziale $u(t') = v(t')$. Supponiamo che $v \in L^\infty\left(\left(t', t' + \frac{c_\gamma}{C}\right), H^1\right)$. Per $C$ c'è

Una sovrapposizione di $u$ e e di $v$ in $[t', T^*)$




Si ha $u = v$ in $[t', T^*)$.

Allora $u$ si estende a $[0, , t' + \frac{cr}{C}] \supset [0, T^*)$.

Assurdo.

---

Verifichiamo il fatto, lasciato in sospeso, che $u$ è una funzione test per $v$ in $[0, T]$.

Si ha

$$\int_0^t \left( \nu \langle \nabla v, \nabla \varphi_n \rangle - \langle v, \partial_t \varphi_n \rangle + \langle \operatorname{div}(v \otimes v), \varphi_n \rangle \right) dt' =$$

$$= \langle u_0, \varphi_n(0) \rangle - \langle v(t), \varphi_n(t) \rangle \qquad \forall\, t$$

Fissato $0 < t \leq T$

$$u \in L^\infty((0,t), H^1) \cap L^2((0,t), H^2) \cap H^1((0,t), L^2)$$

$\varphi_n \to u$ in tutti questi spazi

$$\int_0^t \left( \nu \langle \nabla v, \overset{\nabla u}{\nabla \varphi_n} \rangle - \langle v, \overset{\partial_t u}{\partial_t \varphi_n} \rangle + \langle \mathrm{div}(v \otimes v), \varphi_n \rangle \right) dt' =$$

$$= \langle v_0, \underbrace{\varphi_n(0)}_{u(0)} \rangle - \langle v(t), \underbrace{\varphi_n(t)}_{u(t)} \rangle \qquad \forall\, t$$

Fissato $0 < t \le T$

$$u \in L^\infty((0,t), H^1) \cap L^2((0,t), H^2) \cap H^1((0,t), L^2)$$

$$\Downarrow$$

$$C^0([0,t], L^2)$$

$\varphi_n \to u$ in tutti questi spazi

$$\nabla v \in L^2((0,t), L^2)$$

$$v \in L^\infty((0,t), L^2)$$

$$\left| \int_0^t \langle \mathrm{div}(v \otimes v), \varphi_n - u \rangle \, dt' \right| \le \int_0^t |\nabla v|_{L^2_x} |v|_{L^2_x} |\varphi_n - u|_{H^2_x} \, dt'$$

$$\le |v|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2)} \, |\nabla v|_{L^2(\mathbb{R}_+, L^2_x)} \, \underbrace{|\varphi_n - u|_{L^2([0,t], H^2_x)}}_{\to 0}$$

Teo Sia $u_0 \in V$ e sia $u \in L^\infty([0,T], V)$
$\nabla^2 u \in L^2([0,T], L^2)$ ~~sol~~ soluzione. Sia in più
$u_0 \in H^m(\mathbb{R}^d)$ $m \geq 2$. Allora
$$u \in L^\infty([0,T], H^m), \quad \nabla u \in L^2([0,T], H^m)$$

Dim Si considera

$$\begin{cases} \dot{u}_n + P_n \mathbb{P}\, \mathrm{div}(u_n \otimes u_n) - \nu \Delta u_n = 0 \\ u_n|_{t=0} = P_n u_0 \end{cases}$$

Dimostreremo che $\forall$ $1 \leq k \leq m$ $0 \leq t \leq T$
$$|u_n(t)|^2_{H^k} + \nu \int_0^t |u_n|^2_{H^{k+1}} dt' \leq C_{k,T,|u_0|_{H^k}} \quad \forall n.$$

$\underbrace{u_n \text{ converge}}$ a $u$ $*$ debolmente in $L^\infty([0,T], H^k)$
e debolmente in $L^2([0,T], H^{k+1})$

$$|u(t)|^2_{H^k} + \nu \int_0^t |u|^2_{H^{k+1}} dt' \leq C_{k,T,|u_0|_{H^k}}$$

$$\Rightarrow u \in L^\infty([0,T], H^m) \cap L^2([0,T], H^{m+1})$$

$$\begin{cases} \dot{u}_n + P_n \mathbb{P}\,\mathrm{div}(u_n \otimes u_n) - \nu \Delta u_n = 0 & \langle\,,u_n\rangle_{H^k} \\ u_n|_{t=0} = P_n u_0 \end{cases}$$

$1 \le k \le m \qquad 0 \le t \le T$

$$|u_n(t)|^2_{H^k} + \nu \int_0^t |u_n|^2_{H^{k+1}}\, dt' \le C_{kT|u_0|_{H^k}} \qquad \forall n. \quad *$$

$2 \le k \le m$ e che $*$ vera per $k-1$.

$$\langle f, g\rangle_{H^k} = \langle \langle\xi\rangle^k \hat{f}, \langle\xi\rangle^k \hat{g}\rangle$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_n|^2_{H^k} + \frac{\nu}{2}\cancel{\nu}\langle \nabla u_n, \nabla u_n\rangle_{H^k} = -\langle \cancel{P_n \mathbb{P}}\,\mathrm{div}(u_n \otimes u_n), u_n\rangle_{H^k}$$

$$\le |\mathrm{div}(\overset{\nabla u_n}{u_n} \otimes \overset{u_n}{u_n})|_{H^k} |u_n|_{H^k} \le C |\nabla u_n|_{H^k} |u_n|^2_{H^k}$$

$$\le C_\nu |u_n|^4_{H^k} + \cancel{\frac{\nu}{2} |\nabla u_n|^2_{H^k}} \qquad \lambda a \frac{b}{\lambda} \le \frac{\lambda^2 a^2}{2} + \frac{b^2}{2\lambda^2}$$

$$\frac{d}{dt}|u_n|^2_{H^k} + \nu |\nabla u_n|^2_{H^k} \le C'_\nu |u_n|^2_{H^k} |u_n|^2_{H^k}$$

$$\overbrace{|u_n(t)|^2_{H^k} + \nu \int_0^t |\nabla u_n|^2_{H^k}\, dt'}^{X_n(t)}$$

$$\le |P_n u_0|^2_{H^k} + C'_\nu \int_0^t |u_n|^2_{H^k} X_n(t')\, dt'$$

$$X_n(t) \le |u_0|^2_{H^k}\, e^{C'_\nu \underbrace{\int_0^T |u_n|^2_{H^k} dt'}_{|u_n|^2_{L^2([0,T],H^k)}}}$$

Corollario Sia $u \in L^\infty([0,T],V)$, $\nabla^2 u \in L^2([0,T],L^2)$.

Allora $\forall m$ si ha $u \in C^\infty((0,T],H^m)$

Dim Sia $\varepsilon > 0$ $\quad [\varepsilon, T]$

Siccome $u \in L^2([0,T],H^2) \Rightarrow \exists\ 0 < t_2 < \varepsilon$ t.c. $u(t_2) \in H^2$. Per il Teor precedente segue che $u \in L^\infty([t_2,T],H^2) \cap L^2([t_2,T],H^3)$

$\Rightarrow \exists\ t_3 \in (t_2, \varepsilon) \subset (0,\varepsilon)$ dove $u(t_3) \in H^3$.

E così via $\exists\ t_n \in (0,\varepsilon)$ t.c. $u(t_n) \in H^n$

$\Rightarrow u \in L^\infty([\varepsilon,T],H^n) \cap L^2([\varepsilon,T],H^{n+1})\ \forall n$.

Supponiamo inoltre che

$$\partial_t u = \nu \Delta u - \mathbb{P}\,\mathrm{div}(u \otimes u) \qquad \ast$$

in $\mathcal{D}'((0,T), L^2_x) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T), L^2_x)$

Il R.H.S. è in $L^\infty([0,T],H^m)\ \forall m$

$\Rightarrow \partial_t u \in L^\infty([\varepsilon,T],H^m)\ \forall m$

$\Rightarrow u \in C^0((0,T],H^m)\ \forall m$.

$\Rightarrow u \in C^1((0,T],H^m)\ \forall m$.

$$\partial_t^2 u = \nu \Delta \partial_t u - \mathbb{P} \operatorname{div}(\partial_t u \otimes u + u \otimes \partial_t u)$$

~~e~~ E così via per induzione $u \in C^2([0,T], H^m)\ \forall m$.

Per induzione

$$\partial_t^j u = \nu \Delta \partial_t^{j-1} u - \mathbb{P} \sum_{k=1}^{j-1} \binom{j-1}{k} \operatorname{div}(\partial_t^k u \otimes \partial_t^{j-1-k} u)$$

$\forall j$ e che

$$\Rightarrow \quad u \in C^\infty([0,T], H^m)\ \forall m.$$

Teor (Serrin) Sia $u$ di Leray-Hopf in $d=3$

e sia

$$u \in L^r([0,T], L^s(\mathbb{R}^3)) \qquad \frac{2}{r} + \frac{3}{s} = 1 \qquad r \geq 2 \quad (*)$$

$s \geq 3$ ~~$s > 3$~~

Allora $u \in C^\infty((0,T] \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ e per ogni $\varepsilon \in (0,T)$, $u$ è una soluzione in $[\varepsilon, T]$ nel senso delle soluzioni con dato iniziale in $V$.

Inoltre $u$ è l'unica soluzione di Leray Hopf in $[0,T]$ con dato iniziale $u_0$

Observações