$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n^2 - 2n + 3}{3n^2 - n - 1} =$$

$$\left\{ a_n = \frac{2n^2 - 2n + 3}{3n^2 - n + 1} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(2n^2 - 2n - 3\right) = +\infty$$

Infatti $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(3n^2 - n - 1\right) = +\infty$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3n^3 - 2n^2 + n + 1}{-2n^2 - n - 2}$$

$-\infty$

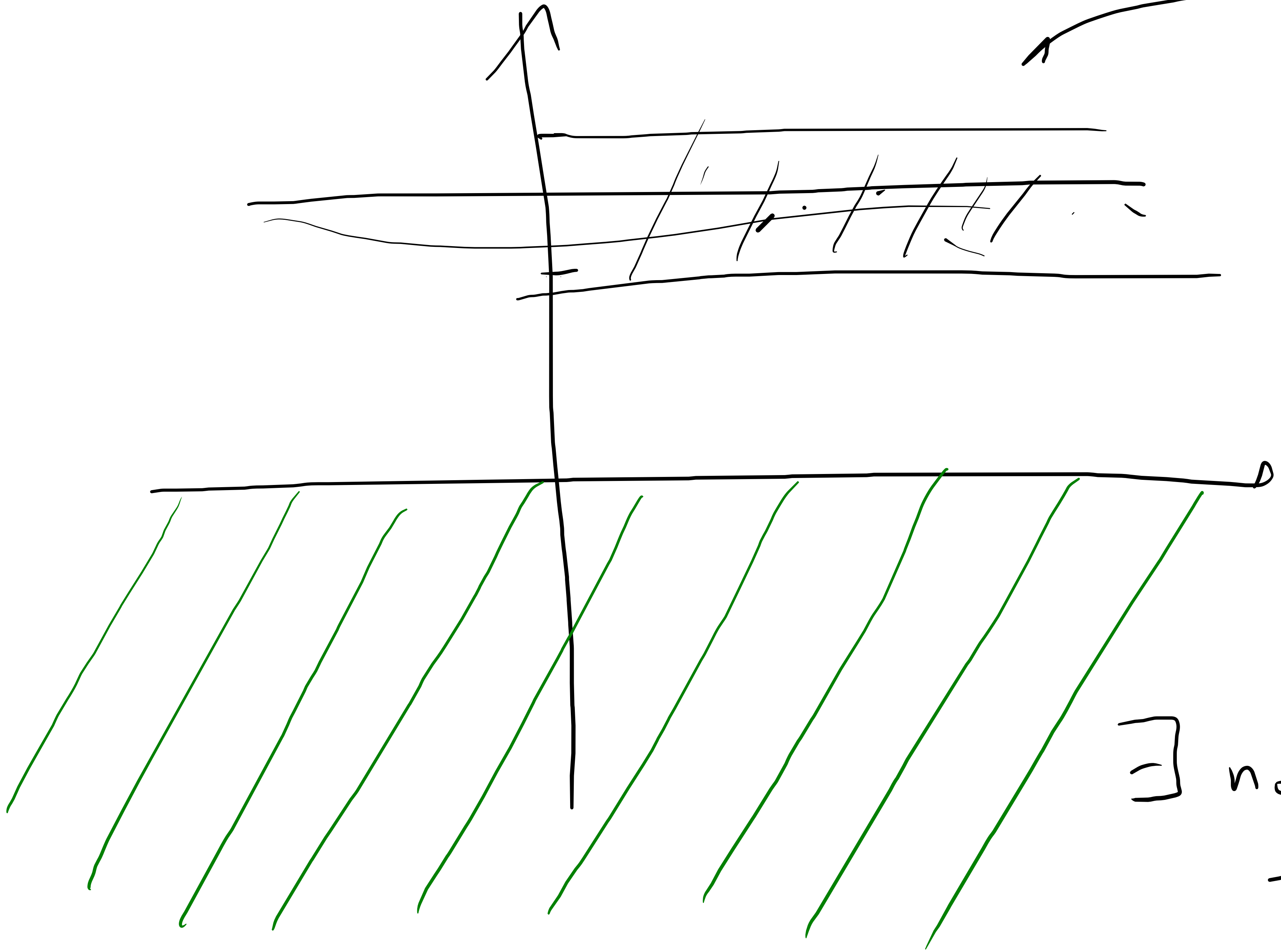
$$\frac{\cancel{n^3}\left(3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}{\cancel{n^2}\left(-2 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}\right)} = n \cdot \left(\frac{3 - 2/n + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{-2 - 1/n - 2/n^2}\right)$$

Teorema (Permanenza del Segno)

Supponiamo $\lim_{n \to +\infty} a_n = l$ $\quad l \neq 0$.

Allora se $l > 0$ $\quad \exists\, n_0 : \forall n > n_0 \quad a_n > 0$

$(l < 0)$ $\quad (a_n < 0)$



$l > 0$ (l finito)

Scelto opportunamente un intorno I_l di l in modo che

$I_l \cap \{y \leq 0\} = \emptyset$.

$\exists\, n_0 : \forall n > n_0 \quad a_n \in I_l \Rightarrow a_n > 0$

Se invece $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ NON possiamo concludere alcunché sul segno di a_n

Per es

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0$$

ma $a_n > 0$ se n pari

$a_n < 0$ se n dispari

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^3-4n+1}{4n^4-5n^2-2n-1} = 0$$

$$3n^3-4n+1 = \frac{\cancel{n^3}\left(3-\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^4\left(4-5/n^2-2/n^3-1/n^4\right)} =$$

infinitesimo

limitato

$$= \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3-\frac{4}{n^2}+1/n^3}{4-5/n^4-2/n^3-1/n^4}\right) \longrightarrow 0$$

In generale se

$$a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$$

e $\deg(P(n)) = \deg(Q(n)) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \underset{\text{finito}}{l}$

grado

Se invece $\deg(P(n)) > \deg(Q(n)) \Rightarrow \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è DIVERGENTE

Infine $\deg(P(n)) < \deg(Q(n)) \Rightarrow \{a_n\}$ è infinitesima

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 - \sqrt{n} + 1}{3n\sqrt{n} - 1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 - n^{1/2} + 1}{3n^{3/2} - 1}$$

NON sono polinomi, ma applico ragionamenti analoghi a quelli svolti per i polinomi.

$$\frac{n^2 - n^{1/2} + 1}{3n^{3/2} - 1} = \frac{n^2\left(1 - \frac{1}{n^{3/2}} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^{3/2}\left(3 - \frac{1}{n^{3/2}}\right)} =$$

$$= n^{1/2} \, \frac{\left(1 - \frac{1}{n^{3/2}} + \frac{1}{n^2}\right)}{3 - \frac{1}{n^{3/2}}} \longrightarrow +\infty$$

Es Verificare di $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}}_{\text{SOMMATORIA}} := \frac{0}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

$n=0$

$$\frac{0}{2^0} = 2 - \frac{0+2}{2^0} = 0 \checkmark$$

$n=1$

$$0 + \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} 2 - \frac{1+2}{2} = 2 - 3/2 = 1/2 \checkmark$$

Supponiamo $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ vera

Proviamo che vale

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

per ipotesi induttiva

$$2 - \frac{2(n+2)}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$= 2 - \frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}} \qquad = n+3$$

Calcolare allora, se esiste,

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}}_{} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(2 - \frac{n+2}{2^n} \right) = \;?$$

In generale confrontiamo la successione potenza n^p con la successione esponenziale a^n (con $a > 1$).

$$\frac{n^p}{a^n} = b_n$$

$$\frac{b_n}{b_{n+2}} = \frac{\dfrac{n^p}{a^n}}{\dfrac{(n+1)^p}{a^{n+1}}}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\dfrac{(n+1)^p}{a^{n+1}}}{\dfrac{n^p}{a^n}} = \frac{(n+1)^p}{a^{n\cancel{+1}}} \cdot \frac{\cancel{a^n}}{n^p} = \frac{1}{a}\left(\frac{n+1}{n}\right)^p$$

$$= \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p \longrightarrow \frac{1}{a} < 1$$

b_{n+k}

Cioè $\frac{b_{n+1}}{b_n} \longrightarrow \frac{1}{a} < 1$ vuol dire

che $\exists\,\delta > 0$ $\frac{b_{n+1}}{b_n} < \overset{q}{\left(\frac{1}{a} + \delta\right)} < 1$ se $n > n_0$

$\underline{b_{n+1} < b_n}$ se $\underline{n > n_0}$

$b_{n+1} < q \cdot b_n$ $\quad q < 1$

$n > n_0$ $\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} < 1$ $\quad b_{n+2} < b_{n+1}$

$b_{n+2} < q^2 \cdot b_n$

$b_{n+2} < q \cdot b_{n+1} <$

$< q \cdot q \cdot b_n$

Se $n > n_0$

$$b_{n+k} < q^k \cdot b_n$$

$$q = \frac{1}{a} - \delta < 1$$

$$b_{n+k} < q^k b_n \quad \text{se } n > n_0$$

Confronto

$k \to +\infty \quad b_{n+k} \longrightarrow 0$

Infatti

$$0 < b_{n+k} < q^k \cdot b_n$$

ovvero

$$\frac{n^p}{a^n} \longrightarrow 0 \qquad \text{se } n \to +\infty$$

Per esercizio confrontate a^n $(a>1)$ con $n!$

ES $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 - 2n - 3}{3^n - 1} = 0$

Infatti $\frac{n^2\left(1 - \frac{2}{n} - 3/n^2\right)}{3^n\left(1 - 1/3^n\right)}$ $\quad \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0$

$$n^p \prec a^n \prec n!$$

$$a > 1$$

$$0 \leq 7\cos^2 n \leq 7$$

$$0 \leq \frac{7\cos^2 n}{n^5} \leq \frac{7}{n^5}$$

$$a_n = \frac{n^4+3}{3n^5+7\cos^2 n+2} \longrightarrow 0$$

è limitat

$$\frac{n^4+3}{3n^5+7\cos^2 n+2} = \frac{n^4\left(1+\frac{3}{n^4}\right)}{n^5\left(3+\frac{7\cos^2 n}{n^5}+\frac{2}{n^5}\right)}$$

$\to 0$

Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $C=(2,1)$ e raggio 1

$$\left\{(x,y) : (x-2)^2+(y-1)^2=1\right\} = \mathcal{C}$$

$$x^2-4x+4+y^2-2y+\cancel{1}=\cancel{1}$$

$$x^2-4x+y^2-2y+4=0$$

Sia $A=(-1,1)$

$A \notin \mathcal{C}$ Trovare le equazioni delle rette passanti per A e tangenti a $\mathcal{C}$.

L'equazione della generica retta passante per $A = (-1, 1)$ è

$$y = m \cdot x + q$$

con la condizione

$$1 = -m + q \Rightarrow q = 1 + m$$

oltre alla retta di eq.

$$x = -1$$

$$\begin{cases} y = mx + \underbrace{1+m}_{q} \\ x^2 - 4x + y^2 - 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

generica retta per $A=(-1,1)$ non verticale

$$x^2 - 4x + (mx+1+m)^2 - 2(mx+1+m) + 4 = 0$$

Impongo $\Delta = 0$ (condizione di tangenza)

$$x^2 + m^2x^2 - 4x + 2m(1+m)x - 2mx + (1+m)^2 - 2(1+m) + 4 = 0$$

$$x^2(1+m^2) + 2m^2x - 4x + (1+m)^2 + 4 - 2(1+m) = 0$$

$$\Delta = 0 \iff \frac{\Delta}{4} = 0 \iff$$

$$m^4 - (1+m^2)\left((1+m)^2 + 2(1+m)+4\right) = 0$$

$_1m \quad - \quad m_2$

$_1q \qquad q_2$

$$2n^2 - 2n + 3 = n^2 \left(2 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} \right)$$

$$3n^2 - n - 1 = n^2 \left(3 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\frac{2n^2 - 2n + 3}{3n^2 - n - 1} = \frac{\cancel{n^2} \left(2 - 2/n + 3/n^2 \right)}{\cancel{n^2} \left(3 - 1/n - \frac{1}{n^2} \right)} \longrightarrow 2/3$$