Esercizi Algebra 1 - 4/11/20

(annaspagnolo97@gmail.com, francesco.digiorgio@studenti.units.it)

Esercizio 1

Siano X e Y insiemi e sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione. Si dimostri che per ogni $A, B \subset Y$ vale:

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$
$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

Esercizio 2

Sia $f : X \to Y$ un'applicazione. Consideriamo la mappa

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{P}(Y) &\to \mathcal{P}(X) \\ B \subseteq Y &\mapsto f^{-1}(B) \subseteq X \ . \end{aligned}$$

Dimostra che:

1. f è iniettiva se e solo se f^* è suriettiva.
2. f è suriettiva se e solo se f^* è iniettiva.

Esercizio 3

Si mostri che $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ sono gruppi abeliani. (Dove $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

Esercizio 4

Sia X insieme non vuoto, definiamo:

$$S(X) = \{f\colon X \to X \mid f \text{ biettiva}\}$$

Si mostri che $S(X)$ è un gruppo, è abeliano?
Sia $X_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, si dica per quali n $S(X_n)$ è abeliano e per quali no.

Esercizio 5

Verificare se le seguenti relazioni sono riflessive, simmetriche, antisimmetriche e/o transitive.

Se la relazione è d'equivalenza, determinare le classi d'equivalenza e l'insieme quoziente; se la relazione è d'ordine, stabilire se è totale.

1. $X = \{\text{rette in } \mathbb{R}^2\}$ $\quad r\rho r' \leftrightarrow r$ è parallela a r'
2. $X = \{\text{rette in } \mathbb{R}^3\}$ $\quad r\rho r' \leftrightarrow r$ è parallela a r'
3. $X = \mathbb{Z}$ $\quad x\rho x' \leftrightarrow |x| = |x'|$
4. $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\quad (a,b)\,\rho\,(c,d) \leftrightarrow (a \geq c \text{ e } b \geq d)$
5. $X = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $\quad x\rho y \leftrightarrow \exists\, a \in \mathbb{N} \mid xa = y$