

Esercizi Algebra 1 - 28/10/20
(annaspagnolo97@gmail.com)

Esercizio 1

Rappresenta le seguenti situazioni nel modo più generale possibile, individuando l'insieme X . U sarà l'insieme universo.

1. $A \subseteq C \quad B \subseteq C \quad A \not\subseteq B \quad X = C \setminus (A \cap \neg B)$
2. $C \subseteq A \quad C \cap D = \emptyset \quad A \cup B = U \quad X = (A \cap \neg D) \setminus C$
3. $A \subseteq B \subseteq C \quad D \cap B \neq \emptyset \quad X = \neg D \setminus (B \cap C \cap D)$

Esercizio 2

1. Siano A, B, C tre insiemi tali che $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = C$. Dimostra che $A = C \setminus B$.
2. Siano A, B, C tre insiemi tali che $A \cup C = B \cup C$ e $A \cap C = B \cap C$. Dimostra che $A = B$.

Esercizio 3

Dimostra le seguenti relazioni riguardanti l'insieme delle parti:

1. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$
2. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(Notare che nel secondo punto non vale l'uguaglianza)

Esercizio 4

Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione. Dimostra che, per ogni $A, B \subseteq X$ vale

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
(Notare che nel secondo punto non vale l'uguaglianza)

Esercizio 5

Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione. Dimostra che

1. $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \quad \forall A \subseteq X$ e vale l'uguaglianza se e solo se f è iniettiva
2. $B \supseteq f(f^{-1}(B)) \quad \forall B \subseteq Y$ e vale l'uguaglianza se e solo se f è suriettiva

Esercizio 6

Stabilisci se le seguenti funzioni sono iniettive e/o suriettive e trova, eventualmente, un'inversa destra/sinistra.

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^3$
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 + 7$
3. $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari e multiplo di 5} \\ 2 & \text{se } n \text{ è dispari e non multiplo di 5} \end{cases}$$

4. $f : \{0, 1, 3, 8\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$

$$f(0) = 1 \quad f(1) = 2 \quad f(3) = 1 \quad f(8) = 0$$

Esercizio 7

Considera l'operazione binaria $\heartsuit : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$a \heartsuit b = ab^2 + ba^2$$

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. Stabilisci se è associativa, commutativa, e se esiste un elemento neutro.