5 Novembre

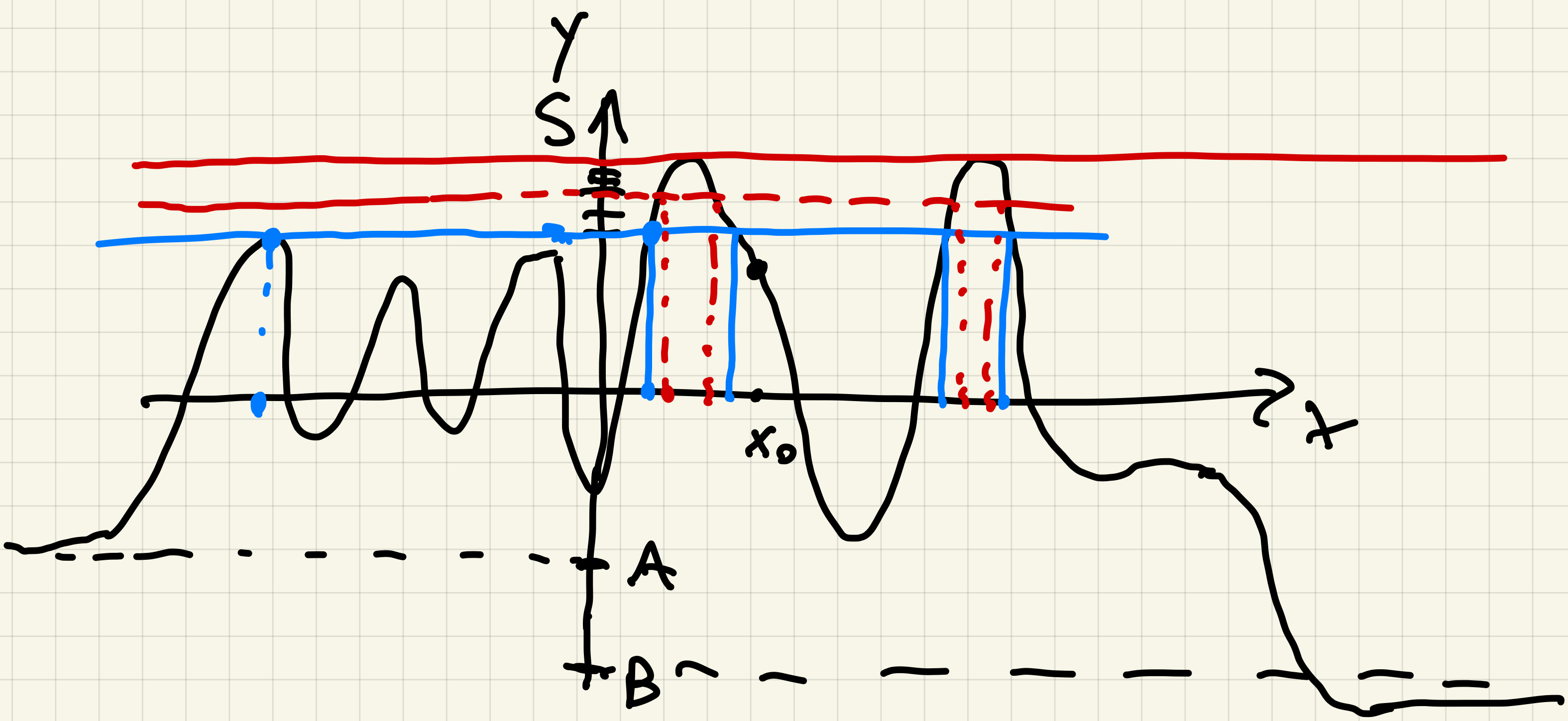
Esercizio $f \in C^0(\mathbb{R})$ t.c.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = B \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}}$$

e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_0) > \max\{A, B\}$.

Allora $\exists$ un punto di massimo x_M.

Dim Considero $S = \sup f(\mathbb{R})$



$\{y_n\}$ in $f(\mathbb{R})$ t.c. $\lim_{n \to +\infty} y_n = S$

$\{x_n\}$ in $\mathbb{R}$ t.c. $y_n = f(x_n)$ $\forall n$.

Per un'oltro esercizio, esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ che ha limite in $\mathbb{R}_e$ scriveremo $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = x_M$.

Vogliamo dimostrare che $x_M \in \mathbb{R}$.

Se $x_M = +\infty$ allora

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = B$$

D'altra parte

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = S \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = S$$

Allora $S = B$, Ma questo non e' possibile perchè esiste con $B < f(x_0) \leq S$

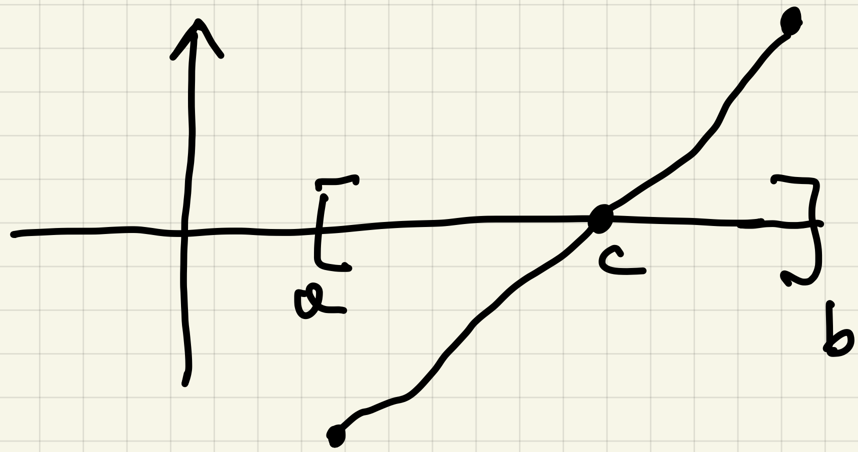
Pertanto $x_M \neq +\infty$

In modo analogo $x_M \neq -\infty$.

Quindi $x_M \in \mathbb{R}$ e resta da dimostrare che è un punto di massimo.

Teorema (degli zeri) Sia $f \in C^0([a,b])$

e sia $f(a)f(b) < 0$

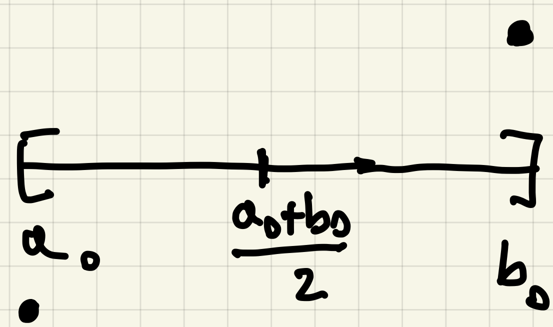


Allora $\exists\ c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = 0$.

<u>Dim</u> Non è restrittivo assumere

$f(a) < 0 < f(b)$

Definiamo una succ. di intervalli dimezzati



$\{[a_n, b_n]\}$,

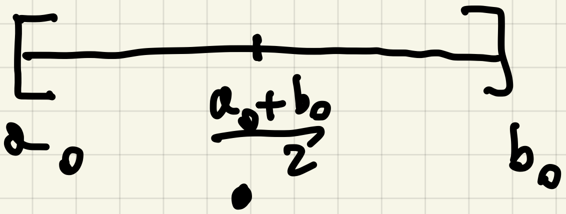
dove $[a_0, b_0] = [a, b]$

Consideriamo $\frac{a_0+b_0}{2}$ e $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)$.

Se $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) = 0$ allora poniamo

$c = \frac{a_0+b_0}{2}$. Se $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) \neq 0$

• allora se $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)>0$

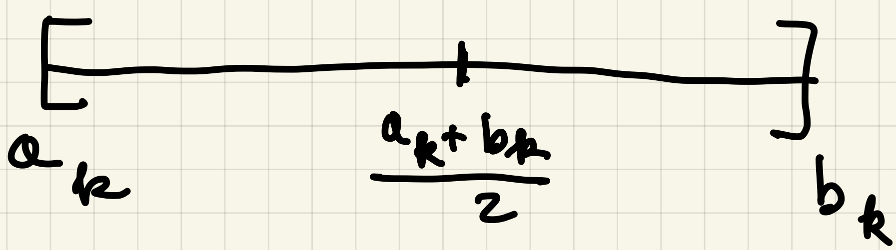


pongo $[a_1,b_1]=\left[a_0,\frac{a_0+b_0}{2}\right]$

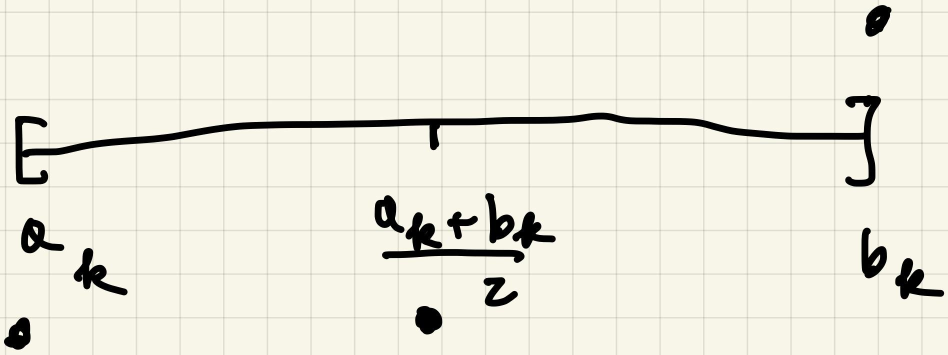
• Se invece $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)<0$ pongo $[a_1,b_1]=\left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]$.

In ogni caso $f(a_1)\,f(b_1)<0$, ed infatti $f(a_1)<0<f(b_1)$.

Supponiamo di avere definito una sequenza finita $[a_0,b_0],\dots,[a_k,b_k]$ di intervalli dimezzati t.c. $f(a_j)<0<f(b_j)$ per tutti i $j=0,\dots,k$. •



• Se $f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right)=0$ pongo $c=\frac{a_k+b_k}{2}$



Se $f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right)>0$ allora definisco

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \left[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}\right]$$

Se invece $f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right)<0$ allora definisco

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \left[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k\right].$$

Resta definita una successione (finita o infinita) di intervalli dimezzati

$\{[a_n, b_n]\}_{n=0,\dots}$ con $f(a_n)<0<f(b_n)$.

Consideriamo il caso di una successione infinita di intervalli. Supponiamo che

esiste un unico $c \in [a_n, b_n]$ $\forall n$

con $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$.

Andiamo a verificare il valore di $f(c)$.

$f(c) = ?$

Osserviamo che per continuità

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = c \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(c)$$

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = c \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c).$$

Ma $f(b_n) > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c) \geq 0$

Ma $f(a_n) < 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) \leq 0$

$$\Rightarrow \quad f(c) = 0$$

Applicazioni

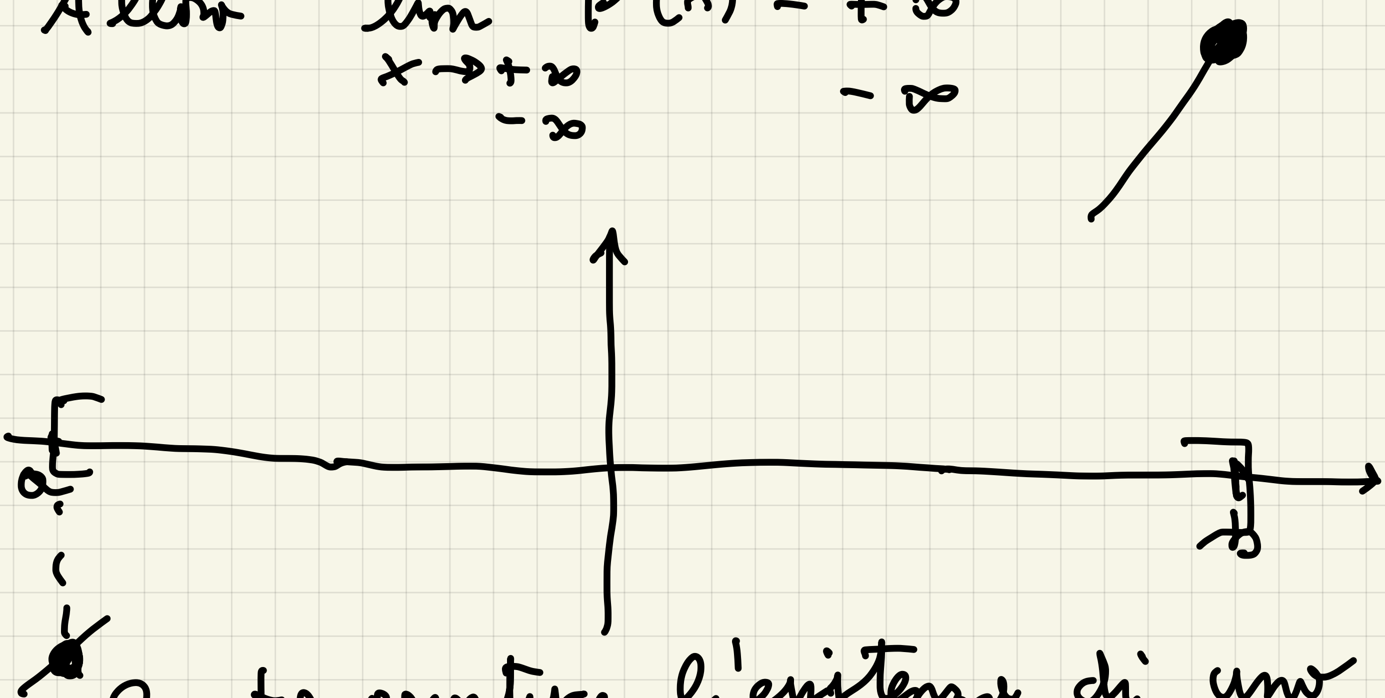
1) Lemma Sia $P(x)$ un polinomio di grado dispari a coefficienti reali. Allora esso ha almeno una radice reale.

2) Per polinomi di grado pari 1) è falso. Es: $p(x) = x^2+1$

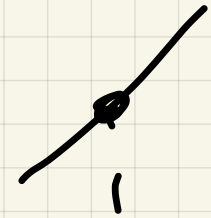
Dim 1) Sia $p(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + \dots + a_0$

Non è restrittivo assumere $a_{2n+1} > 0$.

Allora $\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$
$\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$

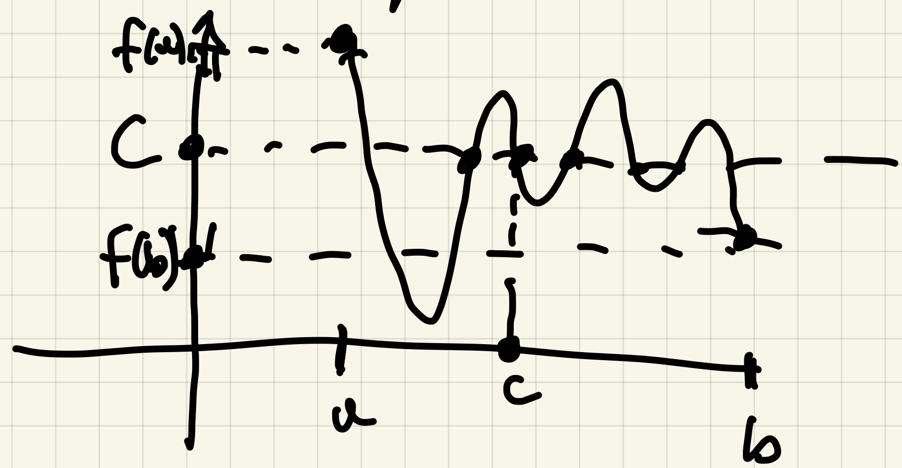


Questo garantisce l'esistenza di una coppia $a < b$ in $\mathbb{R}$ t.c. $p(a) < 0 < p(b)$

Siccome $p \in C^0([a,b])$ e  $p(a)<0<p(b)$

allora, per il teor degli zeri, $\exists\ c \in (a,b)$ t.c. $p(c)=0$.

Teor (valori intermedi) Dato $f \in C^0([a,b])$ e un numero C compreso tra $f(a)$ ed $f(b)$



Allora esiste $c \in [a,b]$ t.c. $f(c) = C$.

Dim Se $C = f(a)$ o $C = f(b)$ basta scegliere $c = a$ o $c = b$.

Se $C \neq f(a)$ e $C \neq f(b)$ allora consideriamo $g(x) = f(x) - C$.

Si ha
$$g(a)\,g(b) = \big(f(a) - C\big)\big(f(b) - C\big) < 0$$

Siccome $f \in C^0([a,b]) \iff g \in C^0([a,b])$ per il teor degli zeri $\exists\, c \in (a,b)$ t.c.
$$g(c) = 0 \iff \boxed{f(c) = C}$$

□

Esercizi 1) Sia $\{x_n\}$ una successione e sia $\{x_{n_k}\}$ una sottosuccessione. Allora

$$k \leq n_k \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Dim Dire che $\{x_{n_k}\}$ e' una sottosuccessione di $\{x_n\}$ è equivalente a dire che $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una succ. strettamente crescente di numeri naturali. Dimostriamo per induzione che $n_k \geq k \ \forall\, k$

1) Per $k=1$, siccome $n_1 \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \quad n_1 \geq \min \mathbb{N} = 1$$

2) Supponiamo di avere $n_k \geq k$.

Siccome $n_{k+1} > n_k \Rightarrow n_{k+1} \geq n_k + 1$
$$\geq k+1$$

Pertanto $n_k \geq k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$.

Esercizi Se $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ allora $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = L$ $\forall$ sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$.

Dim $L \in \mathbb{R}$.

$\lim_{n\to+\infty} x_n = L$ significa che

① $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists\ N_\varepsilon \text{ t.c. } n > N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon}$

Voglio dimostrare $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = L$ cioè che

② $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\ M_\varepsilon$ t.c. $k > M_\varepsilon \Rightarrow |x_{n_k} - L| < \varepsilon$

Se scegliamo $M_\varepsilon = N_\varepsilon$ allora

$k > M_\varepsilon \overset{=N_\varepsilon}{\Longrightarrow} n_k \geq k > N_\varepsilon \overset{①}{\Longrightarrow} |x_{n_k} - L| < \varepsilon$

$\Longrightarrow$ ② è vera con $M_\varepsilon = N_\varepsilon$.