$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$ max min assoluti su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}$

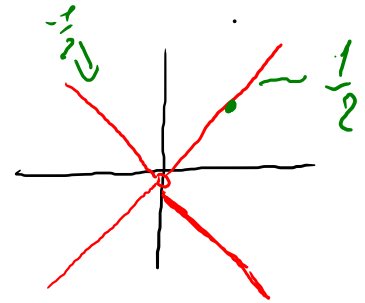
$$\nabla f(x,y) = \left( \frac{\overset{y(x^2+y^2-2x^2)}{y(x^2+y^2) - 2x^2y}}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \right)^T = (0,0)^T$$

$y(y^2-x^2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(y-x)(y+x) = 0 \\ x(x-y)(x+y) = 0 \end{cases}$$

$y=0 \Rightarrow x=0$ NO

$y=x \ \vee \ y=-x$




se $x=y$ oppure $x=-y$ $\quad f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

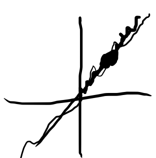
$$f(x,-x) = \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$$

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

$$-\frac{1}{2}(x^2+y^2) \leq xy$$

$$f(x,y) \geq -\frac{1}{2}$$



$f(1,1) = \frac{1}{2}$ $\quad \max f = \frac{1}{2}$

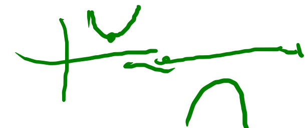
$f(-1,1) = -\frac{1}{2}$ $\quad \min f = -\frac{1}{2}$

Metodo di Jacobi - Sylvester

$n = 2$ $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ $\quad \varphi(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$

Poniamo $t = \frac{x}{y}$

$\varphi(x,y)$ : sia $y \neq 0$ $\quad \varphi(x,y) = y^2 \underbrace{\left[ a\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2b\frac{x}{y} + c \right]}_{at^2+2bt+c}$



$\varphi$ definito positivo significa $\varphi(x,y) > 0 \ \forall (x,y)^T \neq (0,0)^T$ e $a > 0$

$\Rightarrow$ $\underbrace{at^2+2bt+c}$ $> 0 \ \forall t$ questo accade se e solo se $\frac{\Delta}{4} = b^2 - ac < 0$

cioè se $\boxed{\det A > 0 \ \text{e} \ a > 0}$

Mentre $\varphi(x,y) < 0 \ \forall (x,y)^T \neq (0,0)^T \Rightarrow \boxed{\det A > 0 \ \text{e} \ a < 0}$

$\varphi$ indefinito significa che esistono $(x_1,y_1)^T$ e $(x_2,y_2)^T$ con

$\varphi(x_1,y_1) < 0$ e $\varphi(x_2,y_2) > 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4} > 0$ cioè $\det A < 0$

## Teorema

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

Sia $\varphi(x,y)$ la forma quadratica definita dalla matrice $A$, $A^T = A$

Allora $\varphi$ è definita positiva se e solo se $\det A > 0$, $a > 0$

$\varphi$ è definita negativa se e solo se $\det A > 0$, $a < 0$

$\varphi$ è indefinita se e solo se $\det A < 0$

Es) $f(x,y) = x^4 + y^4$

$-x^4 - y^4$

$x^4 - y^4$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$N = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \cdot & a_{22} & a_{23} \\ \cdot & \cdot & a_{33} \end{pmatrix}$$

$N > 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & & a_{1N} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{NN} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$\varphi$ è definito-positivo se e solo se

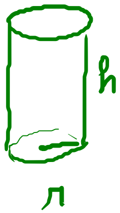
$a_{11} > 0$, $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} > 0$, $\det A > 0$

$\varphi$ è definito-negativo se e solo se

$a_{11} < 0$, $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} > 0$, $\det A < 0$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N \end{pmatrix}$$




costo fondo 5 €/m²    coperchio 1 euro

laterale 2 €/m²

Quali dimensioni mi permettono di minimizzare i costi?

$r, h$    il volume è fissato.    $\boxed{V = \pi r^2 \cdot h}$

spesa $f(r,h) = \pi r^2 \cdot 5 + 2\pi r h \cdot 2 + 1$

costant

$f(x,y) = 5\pi x^2 + 4\pi x y + 1 \qquad x>0,\ y>0$ con vincolo $\pi x^2 \cdot y = V$

Vogliamo calcolare, se esiste, il minimo della funzione

$f(x,y) = 5\pi x^2 + 4\pi xy + 1$ ristretta all'insieme

$\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : \pi x^2 y = V\}$ $\boxed{V \text{ fissato}}$ Come fare?

$y = \dfrac{V}{\pi x^2}$

$h(x) = f\left(x, \dfrac{V}{\pi x^2}\right) = 5\pi x^2 + 4\cancel{\pi} x \cdot \dfrac{V}{\cancel{\pi} x^2} + 1$ $x > 0$

devo studiare la funzione composta di $\gamma(x) = \left(x, \dfrac{V}{\pi x^2}\right)^T$ con $f$ $h(x) = f(\gamma(x))$. Un punto di minimo di $f$ ristretto alla curva equivale a un punto di minimo per $h$.

$$h(x) = 5\pi x^2 + \frac{4V}{x} + 1$$

$$h'(x) = 10\pi x - \frac{4V}{x^2} \qquad h'(x) = 0 \Rightarrow 5\pi x^3 = 2V$$

$$x^3 = \frac{2V}{5\pi}$$

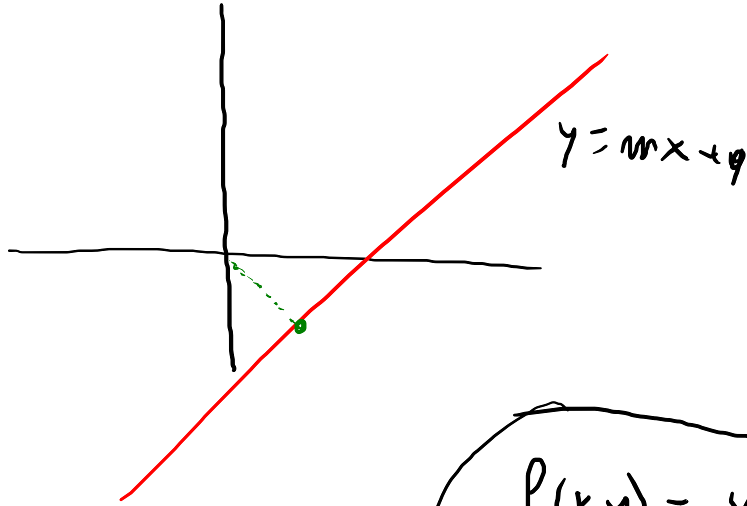
$$x = \sqrt[3]{\frac{2V}{5\pi}} \quad \rightsquigarrow \quad y = \frac{V}{\pi x^2} = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{2V}{5\pi}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{\pi^3 \frac{1}{V^3} \frac{(2V)^2}{(5\pi)^2}}} = \frac{1}{\left[\pi \frac{1}{V} \frac{4}{25}\right]^{1/3}} = \left[\frac{V}{\pi}\right]^{1/3} \left(\frac{5}{2}\right)^{2/3}$$

$$\frac{h}{r} = \frac{y}{x} = \cancel{\left(\frac{V}{\pi}\right)^{1/3}} \left(\frac{5}{2}\right)^{2/3} \left(\frac{5}{2}\right)^{1/3} \cdot \cancel{\left(\frac{\pi}{V}\right)^{1/3}} = \frac{5}{2}$$

Es: Trovare la distanza di una retta del piano dall'origine

$y = mx + q$




$d(P, E) = \min \{ d(P, Q) : Q \in E \}$

$d\left((x,y)^T, (0,0)^T\right)^2 = \|(x,y)^T\|^2$

$f(x,y) = x^2 + y^2$

vincolo $y = mx + q$

$f \circ \gamma \qquad \gamma(x) = (x, mx+q)^T$

$\underbrace{h(x) = x^2 + (mx+q)^2}$

Calcoliamo min $h$ $\qquad h(x) = x^2 + m^2x^2 + 2mxq + q^2$

$$= x^2(1+m^2) + 2mxq + q^2$$

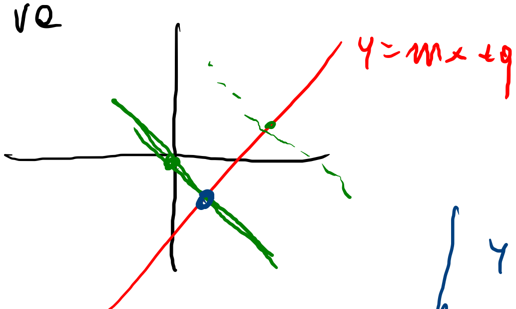
$h'(x) = 0 \qquad \cancel{2}x(1+m^2) + \cancel{2}mq = 0$

$$\boxed{x = -\frac{mq}{1+m^2}} \qquad y = mx+q = \frac{-\cancel{m^2q}}{1+m^2} + \frac{q+\cancel{qm^2}}{1+m^2} = \frac{q}{1+m^2}$$

$$\left(-\frac{mq}{1+m^2}, \frac{q}{1+m^2}\right)^T \qquad f(\ ,\ ) = \frac{m^2q^2}{(1+m^2)^2} + \frac{q^2}{(1+m^2)^2} = \frac{q^2}{1+m^2}$$

$$d(\text{retta}, (0,0)^T) = \frac{|q|}{\sqrt{1+m^2}}$$

Alternative

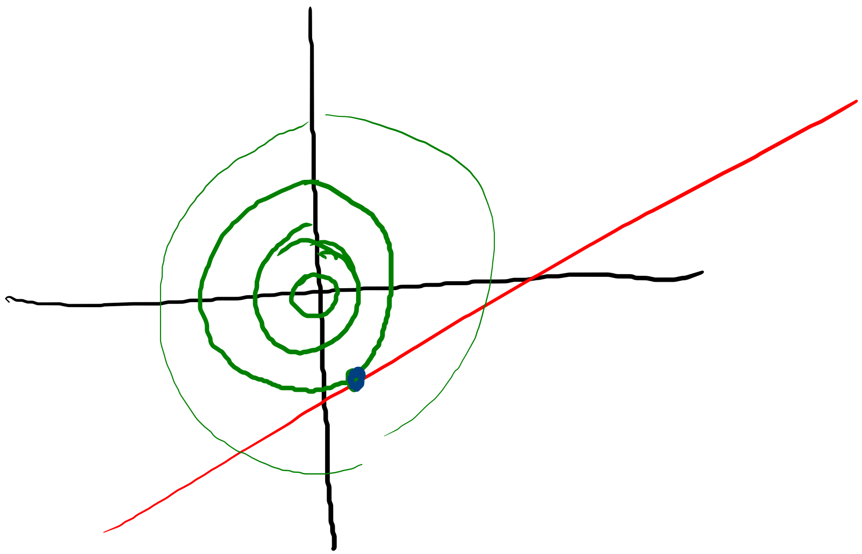



$y = -\frac{1}{m}x + \underbrace{s}_{=0}$

$y = -\frac{1}{m}x$

$$\begin{cases} y = mx+q \\ y = -\frac{1}{m}x \end{cases} \rightsquigarrow mx+q = -\frac{1}{m}x$$

$$x\left(m+\frac{1}{m}\right) = -q \qquad x = -\frac{qm}{1+m^2}$$



$y = mx + q$

vincolo

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

linee di livello di $f$ : $x^2 + y^2 = \alpha$

osserviamo che nel punto che realizza il minimo si ha che la tangente alla linea livello di $f$ è parallela al vincolo

# Problemi di minimo/massimo vincolato.

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

Diremo vincolo un sottoinsieme $V$ di $A$ non aperto. $V \subset A$

Un punto $x^0 \in V$ si dice un punto di estremo vincolato per $f$ [massimo/minimo] se $x^0$ è punto di estremo per $f|_V$ (restrizione di $f$ a $V$).

<u>Casi importanti in $\mathbb{R}^2$</u>

1) $V$ una curva
- curva parametrica $V = \{\gamma(t) : t \in I\}$
- grafico $V = \{(x, h(x))^T \quad x \in I\}$
- forma implicita $V = Z_g = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$

Se $V$ è una curva parametrizzata, studiare un punto di estremo per $f$ vincolato a $V$ equivale a studiare un punto di estremo per la funzione $f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}$

[ Se $V$ è il grafico di una funzione $h : I \to \mathbb{R}$, $V = \{ \gamma(t) : t \in I \}$ con $\underline{\gamma(t) = (t, h(t))^T}$ ]

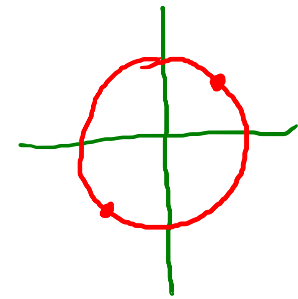
Es: $f(x,y) = x + y$

$V = \underline{\{ (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \}} = \gamma([0, 2\pi])$ $\quad \underline{\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)^T}$

Studiare estremi di $f(x,y) = x+y$ vincolati a $V$ equivale a studiare estremi di $(f \circ \gamma) : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$

$\varphi(t) = f(\cos t, \operatorname{sen} t) = \cos t + \operatorname{sen} t$

$\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$



$\varphi(0) = \varphi(2\pi) = 1$

$\varphi'(t) = -\operatorname{sen} t + \cos t \qquad \varphi'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \vee t = \frac{5}{4}\pi$

$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \qquad \varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$

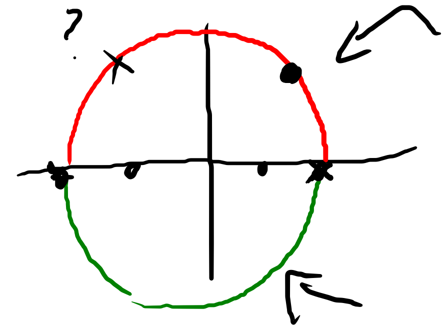
Il massimo di $f$ vincolato a $V$ è $\sqrt{2}$

Il minimo di $f$ " è $-\sqrt{2}$

$$x^2+y^2=1$$

$y = \sqrt{1-x^2}$ $\rightsquigarrow$ $y>0$

$y = -\sqrt{1-x^2}$ $\rightsquigarrow$ $y<0$




$$f(x,y) = x+y$$

$$\varphi(t)$$
$$\|$$

$h(x) = \sqrt{1-x^2}$

$[-1,1]$

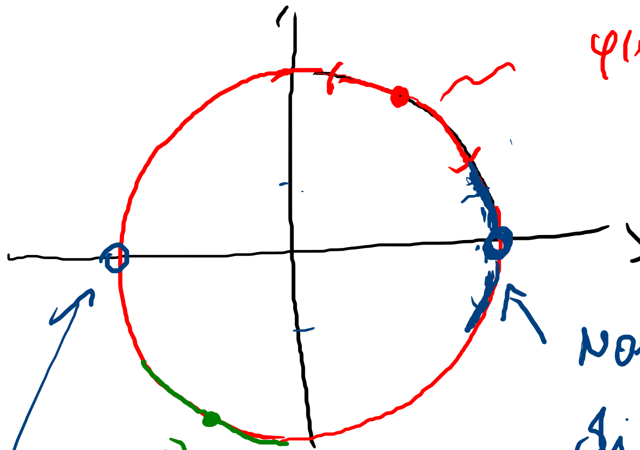
$$\gamma(t) = (t, h(t)) = \left(t, \sqrt{1-t^2}\right)^? \qquad (f\circ\gamma)(t) = t + \sqrt{1-t^2}$$

$$\varphi'(t) = 1 - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = 0 \qquad \sqrt{1-t^2} = t \qquad t^2 = 1-t^2 \rightsquigarrow \quad t^2 = \frac{1}{2} \qquad t = +\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Data una curva rappresentata in forma implicita

$$Z_g = \{ (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0 \} \qquad g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

In un intorno $U$ di un punto della curva $(x_0,y_0)^T \in Z_g$ $[\, g(x_0,y_0) = 0 \,]$ è possibile rappresentare quel pezzettino di curva come grafico di una funzione $\varphi : I \to \mathbb{R}$ $\{ (x, \varphi(x))^T : x \in I \}$ ?



$\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$

$\varphi(x) = -\sqrt{1-x^2}$

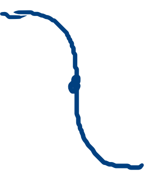
$f(x,y) = x^2 + y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \qquad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y}$

Non è nemmeno localmente il grafico di una funzione in x !

$(h(y), y)^T$

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{=0}\right)^T \longrightarrow$

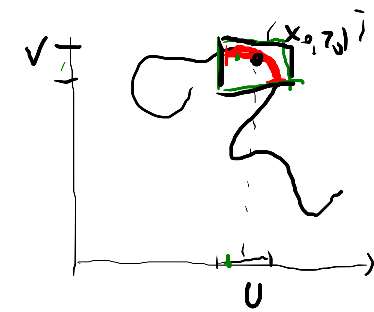


Teorema della funzione implicite (U. Dini) [caso $\mathbb{R}^2$]

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto. $(x_0,y_0)^T \in A$. $g: A \to \mathbb{R}$ continua $g(x_0,y_0)=0$

[$(x_0,y_0)^T \in Z_g = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : g(x,y)=0\}$]. Esiste e sia continua in $A$

la funzione $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ e inoltre sia $\boxed{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0}$.




Allora esistono $U$ intorno di $x_0$, $V$ intorno di $y_0$ tali che

$\forall x \in U$ $\exists$ un unico $y \in V$ che soddisfa $g(x,y)=0$.

Resta quindi definita una funzione $\varphi: U \to V$, $\varphi$ è continua, tale che

$\{(x,\varphi(x))^T \in \mathbb{R}^2 : x \in U\} = Z_g \cap U \times V$.