# 6 Novembre

<u>Corollario</u> Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f \in C^0(I)$. Allora $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$ è o un intervallo oppure è costituito da un unico punto.

<u>Teor</u> Sia $I$ un intervallo ed $f : I \to \overset{J}{\mathbb{R}}$, $f \in C^0(I)$, $f$ strettamente monotona. Sia $J = f(I)$. Allora la funzione inversa, che denoto con $g : J \to I$, è $g \in C^0(J)$, $g$ strettamente monotona.

<u>Dim</u> (Caso $f$ strettamente crescente)

Dimostriamo che $g$ è strettamente crescente. Sia $y_1 < y_2$ in $J$.
Dobbiamo dimostrare che $g(y_1) < g(y_2)$.

$\forall\ y_1 < y_2$ in $J$

Dobbiamo dimostrare che $\boxed{g(y_1) < g(y_2).}$

$y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ $x_1, x_2 \in I$.

Dobbiamo dimostrare $\boxed{x_1 < x_2}$

Infatti $x_1 = x_2$ non può essere vero perché $f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2)$

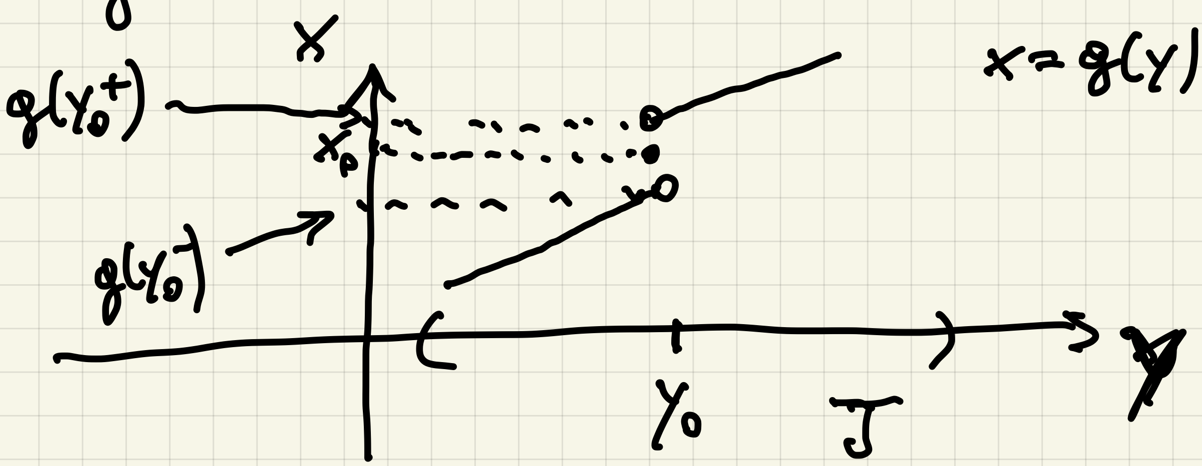
Anche $x_1 > x_2$ è falsa perché $f$ strettamente crescente implicherebbe

$y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$, contrariamente all'ipotesi $y_1 < y_2$.

Non resta che $\boxed{x_1 < x_2}$

Dimostriamo ora che $g$ è continua in $J$

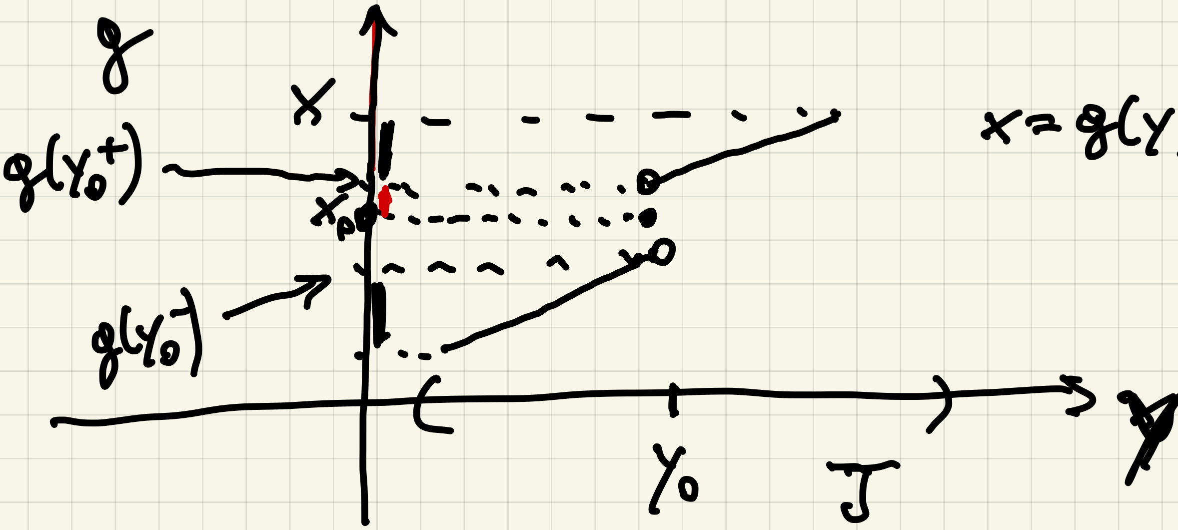
Sia $y_0 \in J$ e supponiamo per assurdo che $g$ non sia continua in $y_0$




Esistono $\underbrace{\lim_{y \to y_0^-} g(y)}_{g(y_0^-)} \le g(y_0) \le \lim_{y \to y_0^+} g(y) =: g(y_0^+)$

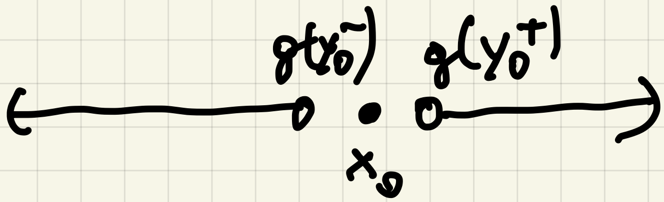
Siccome $g$ non è continua in $y_0$ (per assurdo) almeno una delle disuguaglianze è stretta. Ad esempio, sia

$$g(y_0) < g(y_0^+)$$



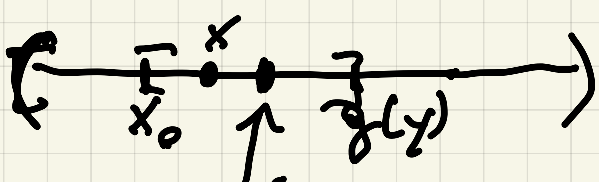

$$x_0 = g(y_0) < g(y_0^+)$$

$g(J)$




Per ipotesi $g(J) = I$

Notiamo che $x_0 \in I$ e siccome per $y > y_0$ ho $g(y) \in I$ segue che




$$\lim_{y \to y_0^+} g(y) = g(y_0^+) \in I$$

Sia $x \in (x_0, g(y_0^+))$, non esiste alcun $y \in J$ t.c. $g(y) = x$.

Questo perchè se esistesse, per $y > y_0$ avrei $g(y) \geq g(y_0^+) > x$. Se invece

$y \le y_0 \Rightarrow g(y) \le g(y_0) = x_0 < x$

Assurdo. $\square$

Abbiamo sviluppato e dimostrato il seguente lemma

<u>Lemma</u> Sia $J$ un intervallo e $g : J \to \mathbb{R}$ monotona.

Allora $g \in C^0(J)$ se e solo se $g(J)$ è un intervallo o un punto.

Funzioni inverse

$$b^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \qquad b > 0, b \ne 1.$$

Sono continue e strettamente monotone e biettive

Una volta stabilito che, per $b > 1$, $b^x$ è strettamente crescente, utilizzando $\lim_{x \to +\infty} b^x = +\infty$ e

che $\lim_{x \to -\infty} b^x = 0$ allora segue

che $b^x$ è suriettiva come funzione

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ perché

$b^{\mathbb{R}}$ è un intervallo

$L = \{ b^x : x \in \mathbb{R} \}$

$$\inf b^{\mathbb{R}} = \lim_{x \to -\infty} b^x = 0$$

$$\sup b^{\mathbb{R}} = \lim_{x \to +\infty} b^x = +\infty$$

$$b^{\mathbb{R}} = \cancel{[0, +\infty)}$$
$$(0, +\infty)$$

$b^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ è biettiva.

Allora la funzione inversa

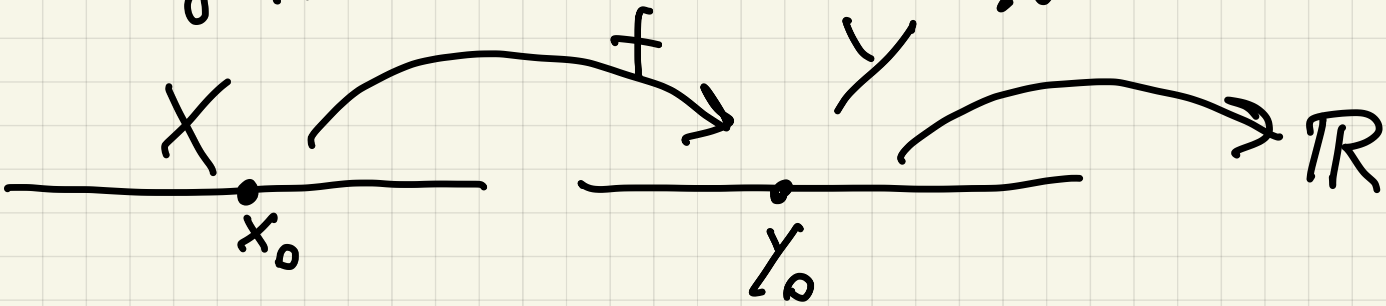
$\log_b x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ è continua.

**Teo** Siano $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ e

$f : X \to Y \qquad g : Y \to \mathbb{R}$

tali che $f(x)$ è continua in un punto $x_0 \in X$

e $g(y)$ è continua in $y_0 = f(x_0)$




Allora $g(f(x)) : X \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0$.

**Dim**

f cont. in $x_0 \iff \forall \sigma > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c.
$|x - x_0| < \delta$ e $x \in X \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \sigma$

g cont in $y_0 = f(x_0) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \sigma > 0$ t.c.
$|y - y_0| < \sigma$ e $y \in Y \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$.

$f$ cont. in $x_0 \iff \forall \sigma > 0 \ \exists \delta_\sigma > 0$ t.c. (1)

$|x - x_0| < \delta_\sigma$ e $x \in X \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \sigma$

$g$ cont in $y_0 = f(x_0) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \sigma_\varepsilon > 0$ t.c. (2)

$|y - y_0| < \sigma_\varepsilon$ e $y \in Y \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$.

Dobbiamo dimostrare che $g(f(x))$ è continua in $x_0$ cioè (3)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $|x - x_0| < \delta$ e $x \in X$

$\Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$

Verifichiamo se possiamo porre $\delta_\varepsilon = \boxed{\delta_{\sigma_\varepsilon}}$

$\forall \varepsilon > 0$

$$|x - x_0| < \delta_{\sigma_\varepsilon} \overset{(1)}{\Longrightarrow} |f(x) - \underbrace{f(x_0)}_{y_0}| < \sigma_\varepsilon \overset{(2)}{\Longrightarrow}$$

$$|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |x - x_0| < \delta_{\sigma_\varepsilon} \Longrightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

Abbiamo dimostrato la (3) per $\delta_\varepsilon = \delta_{\sigma_\varepsilon}$.

Esempi Sia $a \in \mathbb{R}$

$x^a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ è continua.

perchè $x^a = e^{\lg(x^a)} = e^{a \lg x}$

dove $x^a = g(f(x))$ con

$f(x) = a \lg x$

$g(y) = e^y$

$x^a = e^{a \lg x} = e^{f(x)}$

Dal teorema segue $x^a \in C^0(\mathbb{R}_+)$

$$\lim_{y \to 0} \frac{\lg(1+y)}{y} = 1$$

<u>Dim</u> $\quad y = \frac{1}{x}$

$$\frac{\lg(1+y)}{y} = x \lg\left(1+\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \lg\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{\lg(1+y)}{y} = \lim_{x \to \infty} \lg\left(1+\frac{1}{x}\right)^x =$$

Ricordiamo che $\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$$z = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$= \lim_{z \to e} \lg z = \lg e = 1 = \lim_{y \to 0} \frac{\lg(1+y)}{y}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

<u>Dim</u> $\quad y = e^x - 1 \qquad e^x = y + 1$

$x = \lg(y+1) \qquad \lim_{x \to 0}(e^x - 1) = e^0 - 1 = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\lg(1+y)} = 1$$

# Derivate Preliminari

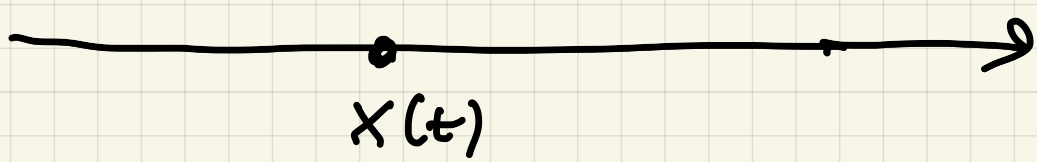
$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

Dati $x, x_0 \in I$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ è un rapporto incrementale.

__Esempio__ se un punto mobile si muove in $\mathbb{R}$ mediante la legge di moto

$$x(t) : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$$




allora $$\frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}$$ è velocità media del moto.

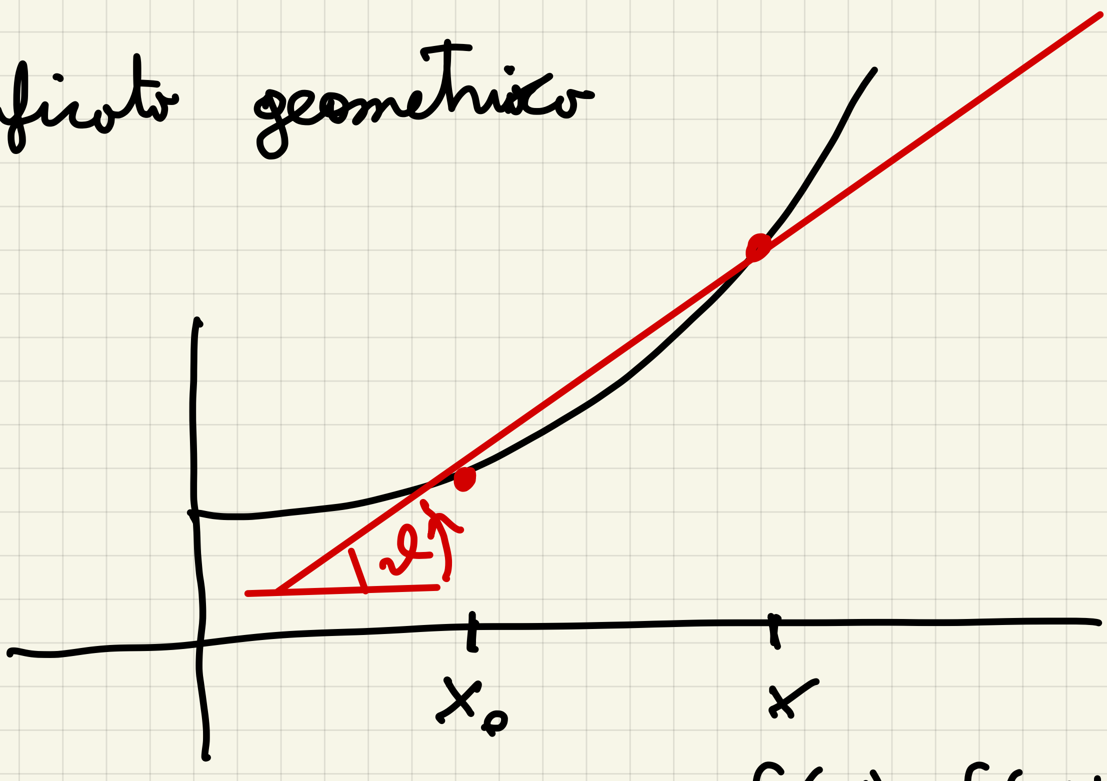
Esempio se $\underset{[t_0, t_1]}{\overset{\uparrow}{t}} \longrightarrow n(t)$ descrive

il numero dei membri di una popolazione

allora $$\frac{n(t_1) - n(t_0)}{t_1 - t_0}$$

rappresenta il tasso medio di variazione.

Significato geometrico




$$\tan\vartheta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Dati $(x_0, y_0)$ e $(x_1, y_1)$ $x_0 \neq x_1$

la retta che li unisce ha equazione

$$\boxed{y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)}$$

Quindi la retta tra $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$