FOGLIO 3

① $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,2,1)$, $u_3 = (1,1,1) \in \mathbb{Q}^3$.

• u_1, u_2, u_3 base di $\mathbb{Q}^3$?

Essendo u_1, u_2, u_3 tanti quanti la dimensione di $\mathbb{Q}^3$, basta controllare che siano l.i.:

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Q}$?

In componenti: $\begin{cases} 1\cdot\lambda_1 + 0\cdot\lambda_2 + 1\cdot\lambda_3 = 0 \\ 1\cdot\lambda_1 + 2\cdot\lambda_2 + 1\cdot\lambda_3 = 0 \\ 0\cdot\lambda_1 + 1\cdot\lambda_2 + 1\cdot\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ✓✓

• esprimere $(1,0,0)$ come c.l. di u_1, u_2, u_3?

Vogliamo trovare $a, b, c \in \mathbb{Q}$ t.c. $(1,0,0) = a u_1 + b u_2 + c u_3$.

Di nuovo, esprimiamo in componenti (è lo stesso sistema di prima, con risultati diversi)

$\begin{cases} a + c = 1 \\ a + 2b + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 1 \\ 2b = -1 \\ b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - c = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = -b = \frac{1}{2} \end{cases}$

PRIMA ERA 000!)

$\Rightarrow (1,0,0) = \frac{1}{2} u_1 - \frac{1}{2} u_2 + \frac{1}{2} u_3$ ✓✓✓

② $v_1 = (1,1,2)$, $v_2 = (0,1,3) \in \mathbb{Q}^3$. $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ sottospazio di $\mathbb{Q}^3$.

QUELLI DI PRIMA

• $v_1 \sim_U v_2$?

$v_1 \sim_U v_2 \iff v_1 - v_2 \in U \iff \exists\, a, b \in \mathbb{Q}$ t.c. $a u_1 + b u_2 = v_1 - v_2$

In componenti: $\begin{cases} a = 1 - 0 = 1 \\ a + 2b = 1 - 1 = 0 \\ b = 2 - 3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a + 2b = 0 \\ b = -1 \end{cases}$. Questo sistema chiaramente non ha soluzioni, quindi $v_1 \not\sim_U v_2$. ✓✓✓

③ $f_1 = x^2 - x - 1, \quad f_2 = 2x^2 + x, \quad f_3 = -x + 2.$

• f_1, f_2, f_3 base di $\mathbb{Q}[x]_2$?

Visto che $\mathbb{Q}[x]_2$ ha dimensione 3 (una base è data da $1, x, x^2$), basta dimostrare che f_1, f_2, f_3 sono linearmente indipendenti:

consideriamo $a, b, c \in \mathbb{Q}$ t.c. $a f_1 + b f_2 + c f_3 = 0$. $a = b = c = 0$?

$$0 = a f_1 + b f_2 + c f_3 = a x^2 - a x - a + 2b x^2 + b x - c x + 2c = (a+2b)x^2 + (b-a-c)x + (2c-a)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ -a + b - c = 0 \\ -a \quad\quad + 2c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a + 2b \quad = 0 \\ 3b - c = 0 \\ 2b + 2c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a + 2b \quad = 0 \\ 3b - c = 0 \\ 8 \cdot b \quad = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad \checkmark\checkmark$$

• Espressione di x^2 come c. l. di f_1, f_2, f_3?

$x^2 = a f_1 + b f_2 + c f_3 = (a+2b)x^2 + (-a+b-c)x + (-a+2c)$, per qualche $a, b, c \in \mathbb{Q}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 1 \\ -a + b - c = 0 \\ -a \quad\quad + 2c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a + 2b = 1 \\ 3b - c = 1 \\ 2b + 2c = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a + 2b = 1 \\ 3b - c = 1 \\ 8b \quad = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - 2b = 2/8 \\ c = 3b - 1 = 1/8 \\ b = 3/8 \end{cases} \quad \checkmark\checkmark$$

④ $U = \{ p \in \mathbb{R}[x]_3 \mid p(-1) = 0 \}$.

• U sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]_3$?

$p, q \in U \Rightarrow p + q \in U$? $\quad p + q \in U \Leftrightarrow p + q\,(-1) = p(-1) + q(-1) \overset{p,q \in U}{=} 0 \ \checkmark$

$p \in U, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda p \in U$? $\quad \lambda \cdot p(-1) = \lambda \cdot 0 = 0 \ \checkmark\checkmark$. $\quad 0 \in U$? $\ 0(-1) = 0 \ \checkmark\checkmark\checkmark$.

• Dimensione di U?

$p \in U \Leftrightarrow x + 1$ divide $p \Leftrightarrow p = (x+1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$

$\Leftrightarrow p = a(x^3 + x^2) + b(x^2 + x) + c(x + 1)$.

Ergo, U è generato da $x^3 + x^2, \ x^2 + x, \ x + 1$.

Questi sono chiaramente l. i. (basta porre $p = 0$ e controllare), quindi $\dim U = 3$ $\checkmark\checkmark\checkmark$

⑤ $f: \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3\}$, $f(1)=2$, $f(2)=2$, $f(3)=1$, $f(4)=3$.

- Inverse destre di f?

$g: \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}$ inversa destra di $f \iff \forall x \in \{1,2,3\}\ f(g(x))=x$.

- $f(g(1))=1 \Rightarrow g(1)=3$ (3 è l'unico elemento di 1,2,3,4 con $f(x)=1$)
- $f(g(2))=2 \Rightarrow g(2)=1$ o $g(2)=2$
- $f(g(3))=3 \Rightarrow g(3)=4$.

Ergo, abbiamo due inverse destre di f, a seconda della scelta di $g(2)$.

⑥ $f: \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}$, $f(1)=3$, $f(2)=4$, $f(3)=1$.

- Inverse sinistre di f?

Cerchiamo delle $g: \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3\}$ t.c. $g(f(x))=x\ \forall x \in \{1,2,3\}$.

$g(f(1))=1 \Rightarrow g(3)=1$; $g(f(2))=2 \Rightarrow g(4)=2$; $g(f(3))=3 \Rightarrow g(1)=3$.

Rimane libero il valore di $g(2)$, che può essere 1, 2, o 3.

Abbiamo quindi 3 inverse sinistre a seconda del valore di $g(2)$.