FOGLIO 4

(1) $\begin{cases} f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto x+2y+z \end{cases}$.

- **f lineare?**

$f((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) = f((x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)) = x_1+x_2+2(y_1+y_2)+z_1+z_2 =$

$= x_1+2y_1+z_1+x_2+2y_2+z_2 = f((x_1,y_1,z_1))+f((x_2,y_2,z_2))$ ✓. (VALIDO $\forall (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3$)

$f(\lambda(x,y,z)) = f((\lambda x, \lambda y, \lambda z)) = \lambda x + 2\lambda y + \lambda z = \lambda(x+2y+z) = \lambda f(x,y,z)$ ✓ ($\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$)

- **f suriettiva?**

$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ t.c. $f(x,y,z)=a$? Sì; $f((a,0,0)) = a\ \forall a \in \mathbb{R}$. ✓✓

- **rg f, null f, base per Ker f?**

f suriettiva $\Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{Im} f) = 1$.

Sappiamo che $\operatorname{null} f + \operatorname{rg} f = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow \operatorname{null} f = 3-1 = 2$.

$\operatorname{Ker} f = \{\underset{\in \mathbb{R}^3}{(x,y,z)} \mid f(x,y,z)=0\} = \{\underset{\in \mathbb{R}^3}{(x,y,z)} \mid x+2y+z=0\}$.

Quindi $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \iff x+2y+z=0 \iff z=-x-2y$.

Ergo, $(x,y,z)\in \operatorname{Ker} f \iff (x,y,z) = (x,y,-x-2y) = x(1,0,-1)+y(0,1,-2)$.

Una base di Ker f è dunque $\{(1,0,-1),(0,1,-2)\}$. ✓✓✓

- **MATRICE DI f?**

$f((1,0,0)) = 1$, $f((0,1,0)) = 2$, $f((0,0,1)) = 1$.

$\Rightarrow$ La matrice di f associata alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M(\underset{\dim \mathbb{R}}{1} \times \underset{\dim \mathbb{R}^3}{3}, \mathbb{R}).$$

② $u=(1,-1,2)\in\mathbb{R}^3$, U il sottospazio generato da u.

• dimensione e base di $\mathbb{R}^3/U$?

Consideriamo la proiezione $\begin{cases}\pi:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3/U\\ v\longmapsto v+U\end{cases}$.

Questa è lineare, suriettiva, e ha $\ker\pi=U$.

Dunque: $\operatorname{rk}\pi+\operatorname{null}\pi=\dim\mathbb{R}^3 \implies \dim\mathbb{R}^3/U+\dim U=\dim\mathbb{R}^3$

$\rightarrow \underbrace{\dim\mathbb{R}^3/U=\dim\mathbb{R}^3-\dim U}_{}=3-1=2.$

VALIDO PER OGNI SPAZIO QUOZIENTE

Per trovare una base di $\mathbb{R}^3/U$, completiamo l'insieme $\{(1,-1,2)\}$ (la base di U) ad una base di $\mathbb{R}^3$: $\{(1,-1,2),(1,0,0),(0,1,0)\}$.

Consideriamo ora $\{(1,0,0)+U,\ (0,1,0)+U\}$: Questa sarà una base per $\mathbb{R}^3/U$.

Infatti $a((1,0,0)+U)+b((0,1,0)+U)=(a,b,0)+U=\underbrace{0}_{\text{è vettore nullo nel quoziente!}}\iff(a,b,0)\in U\iff$

$\iff\exists\lambda\in\mathbb{R}$ t.c. $(a,b,0)=\lambda(1,-1,2)\iff\begin{cases}a=\lambda\\ b=-\lambda\\ 0=-2\lambda\end{cases}\iff a=b=\lambda=0$ ✓✓✓.

(In questo modo abbiamo provato l'indipendenza, il fatto di essere una base segue.)

• componenti di $(1,0,3)+U$?

$(1,0,3)+U=\Big((1,0,3)\underbrace{-\tfrac{3}{2}u}_{\in U}\Big)+U=\big((1,0,3)-(\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2},3)\big)+U=(-\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},0)+U=$

AGGIUNGIAMO UN ELEMENTO DI U, IN QUESTO MODO LA CLASSE NON CAMBIA.

$=-\tfrac{1}{2}\big((1,0,0)+U\big)+\tfrac{3}{2}\big((0,1,0)+U\big)$ ✓✓✓.

③ $\begin{cases} f: \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3 \\ (x,y) \mapsto (2x-y,\ x+y,\ y) \end{cases}$.

(MATRICE DI f? (ASSOCIATA ALLE BASI CANONICHE) $f((1,0)) = (2,1)$, $f((0,1)) = (-1,1) \to A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$)

• *f lineare?*

$$f(\lambda_1(x_1,y_1)+\lambda_2(x_2,y_2)) = f((\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,\ \lambda_1y_1+\lambda_2y_2)) = \dots$$

$$= (2(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)-(\lambda_1y_1+\lambda_2y_2),\ \lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_1y_1+\lambda_2y_2,\ \lambda_1y_1+\lambda_2y_2) =$$

$$= \lambda_1(2x_1-y_1,\ x_1+y_1,\ y_1) + \lambda_2(2x_2-y_2,\ x_2+y_2,\ y_2) = \lambda_1 f((x_1,y_1)) + \lambda_2 f((x_2,y_2))$$ ✓✓✓.

• *f iniettiva?*

f iniettiva $\iff \operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\}$. $\iff \forall (x,y) \in \operatorname{Ker} f \ \ x=y=0$.

$f(x,y) = \underline{0} \iff (2x-y,\ x+y,\ y) = (0,0,0) \iff \begin{cases} 2x-y=0 \\ x+y=0 \\ y=0 \end{cases} \iff x=y=0$ ✓✓✓.

• *rg f, null f, base per im f?*

null f = dim Ker f = 0 ✓.   rg f + null f = dim $\mathbb{Q}^2 \Rightarrow$ rg $f = 2-0 = 2$ ✓✓.

Una base per im f può essere trovata prendendo l'immagine di una base:

$\{(1,0),(0,1)\}$ base per $\mathbb{Q}^2 \Rightarrow \{f((1,0)), f((0,1))\}$ base per Im f

$\Rightarrow \{(2,1,0), (-1,1,1)\}$ base per Im f (IN EFFETTI SONO 2 VETTORI L.I. IN UNO SPAZIO (Im f) DI DIMENSIONE 2!) ✓✓✓.

④ $\begin{cases} g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (3x+y,\ -x+2y) \end{cases}$ *isomorfismo?* (PRENDIAMO PER BUONO CHE g SIA LINEARE, LA TECNICA È LA STESSA DELL'ESERCIZIO 2.)

• *g iniettiva?*

g iniettiva $\iff \operatorname{Ker} g = \{(0,0)\}$. $g(x,y) = \underline{0} \iff \begin{cases} 3x+y=0 \\ -x+2y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-3x \\ -x+2(-3x)=0 \end{cases} \iff x=y=0$ ✓✓.

• *g suriettiva?*

Sappiamo rg g + null g = dim $\mathbb{R}^2$, null g = dim Ker g = 0 $\Rightarrow$ rg $g = 2-0 = 2$.

$\Rightarrow$ dim Im $g = 2$; Im $g \subseteq \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ Im $g = \mathbb{R}^2 \Rightarrow g$ suriettiva ✓✓✓.

• MATRICE DI g? (ASSOCIATA ALLE BASI CANONICHE)

$g((1,0)) = (3,-1)$, $g((0,1)) = (1,2) \to A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

⑤ $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ applicazione lineare, con: $f(e_1) = 2e_2 + 3e_3$
$f(e_2) = -e_1 + e_2$.
$f(e_3) = -e_1 + e_3$

$f((x,y,z)) = ?$

$$f((x,y,z)) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) =$$
$$= x(2e_2 + 3e_3) + y(-e_1 + e_2) + z(-e_1 + e_3) = (-y-z)e_1 + (2x+y)e_2 + (3x+z)e_3 =$$
$$= (-y-z,\ 2x+y,\ 3x+z) \quad ///.$$

- rg f, null f? f isomorfismo?

$$f(x,y,z) = 0 \iff \begin{cases} -y-z=0 \\ 2x+y=0 \\ 3x+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -y-z=0 \\ 2x-z=0 \\ 3x+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -y-z=0 \\ 2x-z=0 \\ 5x=0 \end{cases} \iff$$

$\iff x=y=z=0$. Ergo, $\mathrm{Ker}\, f = \{\underline{0}\} \Rightarrow$ null $f = 0$, rg $f = 3$.

Quindi f è iniettiva ($\mathrm{Ker}\, f = 0$) e suriettiva ($\dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathbb{R}^3$) ///.

- MATRICE DI f?

$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3 \to$ PRIMA COLONNA $\begin{matrix}0\\2\\3\end{matrix}$

$f(e_2) = -e_1 + e_2 \to$ SECONDA COLONNA $\begin{matrix}-1\\1\\0\end{matrix}$

$f(e_3) = -e_1 + e_3 \to$ TERZA COLONNA $\begin{matrix}-1\\0\\1\end{matrix}$

$\Rightarrow$ La matrice di f rispetto alla base canonica (sia nel dominio sia nel codominio)

è $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.