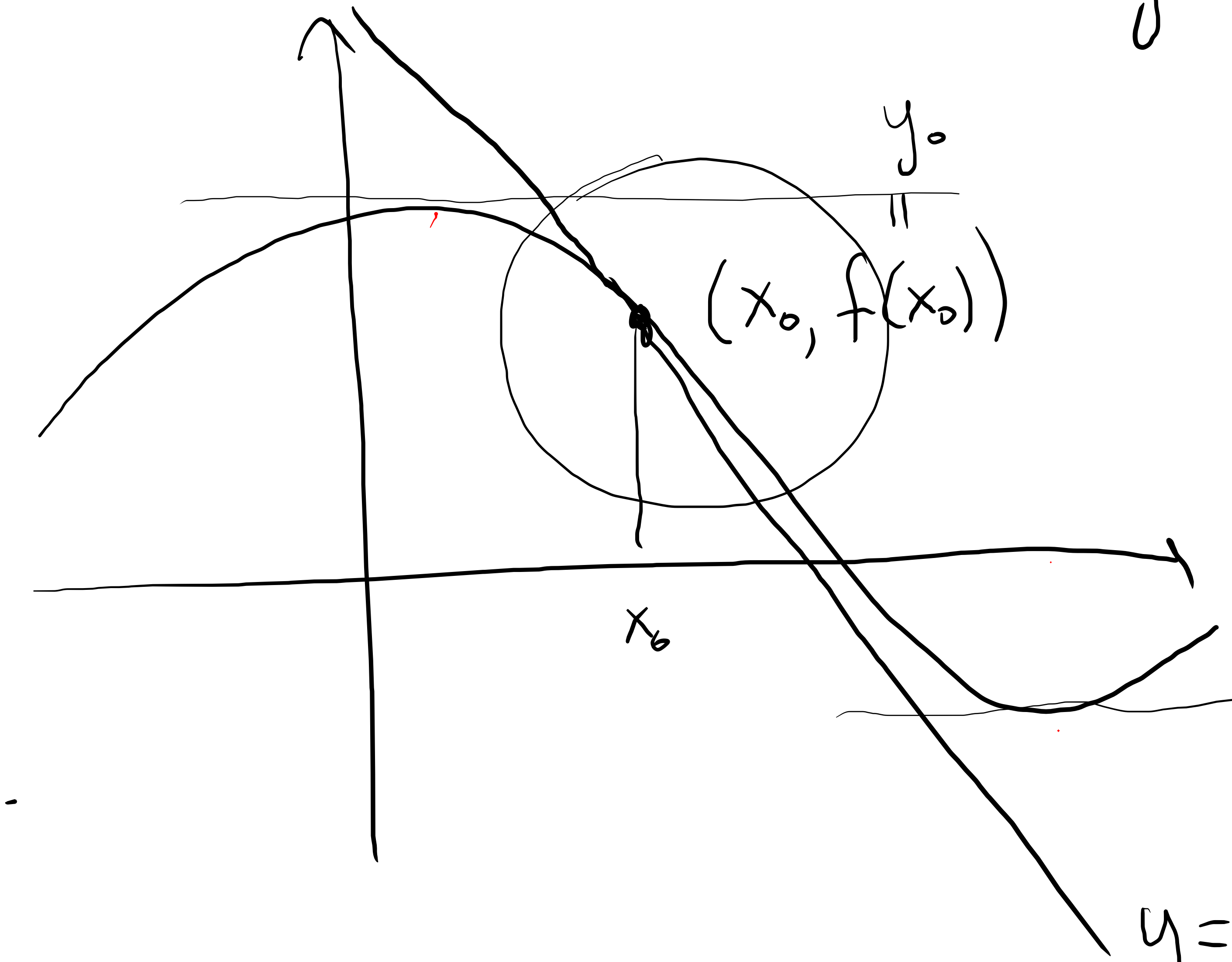


$$y - y_0 = \underbrace{f'(x_0)}\,(x - x_0)$$

$$m = f'(x_0)$$

$$\boxed{y = \underbrace{f'(x_0)} \cdot x + f(x_0) - x_0 \cdot f'(x_0)}$$

$$y = m x + q$$

Def Data una funzione reale di variabile reale f, si dice PRIMITIVA di f ogni funzione F che risulti derivabile e per la quale risulti $F' = f$ $\left(\frac{dF}{dx} = f\right)$

ossia $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathrm{Dom}\, f$

Supponiamo f derivabile

$$\boxed{F} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} f \xrightarrow{\frac{d}{dx}} f'$$

<u>ES</u> $x \mapsto 2x$ ha per primitiva

per esempio la funzione $x \mapsto x^2$.

Ma anche $\underline{x}^2 + \underline{1}$ è PRIMITIVA di $x \to 2x$

Infatti $\frac{d}{dx}(x^2+1) = 2x + 0 = 2x$

In realtà possiamo dire che

$\forall k$ $\quad x \mapsto x^2 + k$ $\quad$ k costante reale

è una primitiva di $x \mapsto 2x$.

Oss Se F è una PRIMITIVA di f anche $F+k$ è una primitiva di f $\forall k \in \mathbb{R}$ (costante)

Prop Ogni primitiva di f è ottenuta aggiungendo una costante ad un'altra primitiva di f.

$\Updownarrow$

Due primitive di f differiscono per una costante.

Dim

Siano $\underline{F}$ e $\underline{G}$ due primitive di f.

$\Downarrow$ F, G derivabili e

$$F'(x) = f(x)$$
$$G'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathrm{Dom} f$$

$$H =: F - G$$

Osservo che H è derivabile

$$\boxed{H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0} \quad \forall x \in \mathrm{Dom} f$$

$\Downarrow$ H costante

— $F - G$ è una costante

ovvero $G = F + k \quad k \in \mathbb{R}$

Notazione

L'insieme di tutte le primitive della funzione $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è indicato con

$$\int f(x)\,dx = \left\{ F : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ derivabile tale che } F'(x) = f(x) \ \forall x \in A \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \boxed{F \text{ primitiva di } f} \\ F + k \quad k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

INTEGRALE INDEFINITO di f

f FUNZIONE	f' derivata
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

$$\int (e^x + \operatorname{sen} x)\, dx =$$

$$= \{ e^x - \cos x + k \quad k \in \mathbb{R} \}$$

$$\frac{d}{dx} x^{\alpha} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1} \qquad \underline{\alpha \in \mathbb{R}}$$

$$x \longmapsto x^{-3/2} = \frac{1}{\sqrt{x^3}} \qquad \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

è ben definito per $\boxed{x \neq 0}$

$$x \longmapsto x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$ è ben definit per $x > 0$.

$\{x > 0\} = \mathbb{R}^+$

Se considero la funzione

$$x \longmapsto x^{\alpha} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

(ove è ben definita) allora

(SE $\alpha \neq -1$) $$\int x^{\alpha}\,dx = \left\{ \frac{1}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1} + k \quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

(SE $\alpha = -1$) $$x \longmapsto \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \left\{ \ln x + k \quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

Infatti se $\underline{\alpha \neq -1}$

$$\frac{d}{dx} x^{\alpha+1} = (\alpha+1) \cdot x^{(\alpha+1)-1} = (\alpha+1) \cdot x^{\alpha}$$

quindi

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1} + k\right) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right) + \overset{=0}{\frac{d}{dx} k} = \frac{1}{\cancel{(\alpha+1)}} \cdot \cancel{(\alpha+1)} \cdot x^{\alpha} + 0 = x^{\alpha}$$

Se $\alpha = -1$, ricordo di

$$\boxed{\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x}\,dx = \left\{ \ln|x| + k \quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$|x| = \sqrt{x^2} = \qquad x \neq 0$$

$$= (x^2)^{1/2} \qquad \ln|x| =$$

$$= \ln (x^2)^{1/2} = \frac{1}{2} \ln x^2$$

Consideriamo la funzione polinomiale

$$x \xmapsto{f} 5x^3 - 3x^2 + \frac{2}{3}x - 1$$

definita $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$$

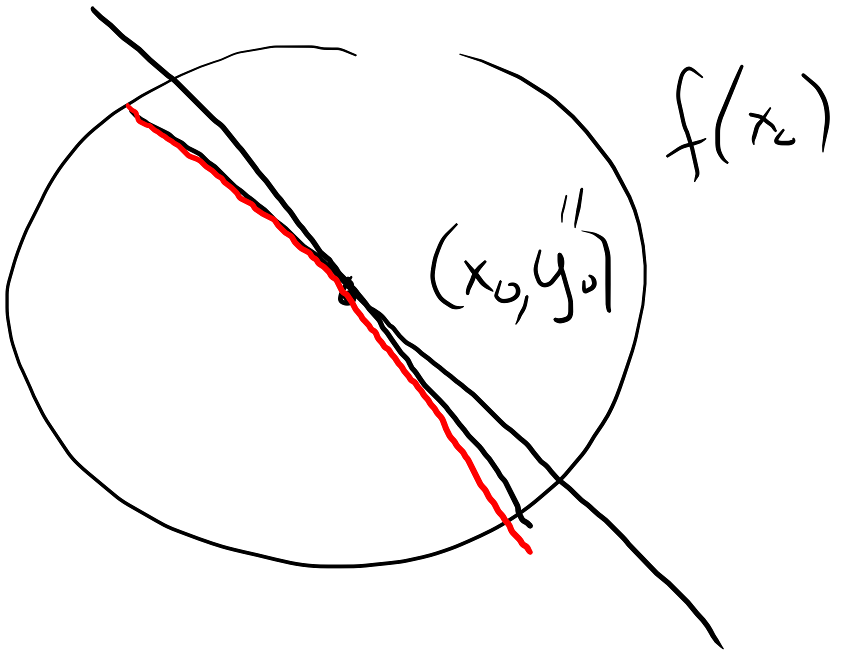
$$\int f(x)\,dx = \left\{ \frac{5}{4}x^4 - x^3 + \frac{1}{3}x^2 - x + k \quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\int 5x^3\,dx = 5 \cdot \int x^3\,dx$$

ogni primitiva di $\int c \cdot f(x)\,dx$ è del tipo $c \cdot F(x)$ con

$$c \int f(x)\,dx = \left\{ c \cdot F(x) \text{ con } F \text{ primitiva di } f \right\}$$

F primitiva di f


$f(x_0)$
(x_0, y_0)

Formula di Leibniz

f, g derivabili

$$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$$

Pensando alla definizione di primitiva, osservo che

$$\int f'(x)\,dx = \{ f(x) + k \quad k \in \mathbb{R} \}$$

somma delle primitive di $f'\cdot g$ e delle primitive di $f\cdot g'$

pertanto

$$\int (f\cdot g)'(x)\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

Formule di INTEGRAZIONE per parti

$$(f\cdot g)(x) = \int (f\cdot g)'(x)\,dx = \int f'\cdot g(x)\,dx + \int (f\cdot g')(x)\,dx$$

Applicazioni

$$x \longmapsto \underset{f(x)}{x}\cdot \underset{g'(x)}{e^x}$$

$$\int x\cdot e^x\,dx = ?$$

$$\int \underset{f}{x}\cdot \underset{g'}{e^x}\,dx = \underset{\int (f\cdot g)'dx}{x\cdot e^x} - \int \underset{f'}{1}\cdot \underset{g}{e^x}\,dx = \left\{ \underbrace{xe^x - e^x + k}_{k\in\mathbb{R}} \right\}$$

Verifichiamo che

$$x \longmapsto x\cdot e^x - e^x + k \quad \text{è primitiva}$$

di $\quad x \longmapsto x\cdot e^x$

Infatti
$$\frac{d}{dx}\left(x e^x - e^x + k\right) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(x\cdot e^x\right) - \underset{\substack{\shortparallel \\ e^x}}{\frac{d}{dx}e^x} + \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{\frac{d}{dx}k} = \cancel{1 e^x} + x\cdot e^x - \cancel{e^x} + 0$$

$$= x\cdot e^x \quad \checkmark$$

$$\int x \cdot \operatorname{sen} x \, dx = -x\cos x - \int 1 \cdot (-\cos x)\, dx$$

$$= -x\cos x + \int \cos x \, dx$$

$$f \qquad g' = \frac{d}{dx}(-\cos x)$$

$$= \{ \operatorname{sen} x - x\cos x + k \quad k \in \mathbb{R} \}$$

Più in generale se

$$f(x) = c_1 x^{\alpha_1} + c_2 x^{\alpha_2} + \dots + c_n x^{\alpha_n}$$

$$\int f(x)\,dx = \left\{ \frac{c_1}{\alpha_j+1} x^{\alpha_1+1} + \dots + \frac{c_n}{\alpha_{\cancel{k}}+1} x^{\alpha_n+1} + c_j \ln x + \dots + k \right\}$$

se $\alpha_j \neq -1$ $\qquad\qquad$ $\alpha_j = -1$

$$= \left\{ \sum_{\alpha_j \neq -1} \frac{c_j}{\alpha_j+1} x^{\alpha_j+1} + \sum_{\alpha_j = -1} c_j \ln x + k \right\}$$

$$\int \frac{x^2-2x}{3x^2+x-1}\,dx = ?$$

$$\int f'(x)\,dx = \{ f(x)+k \quad k\in\mathbb{R}\}$$

g,f derivable

$$\int \boxed{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = \int y \cdot y'\,dx$$

$$\frac{d}{dx}\, g(f(x)) = g'(f(x))\cdot f'(x)$$

$$f(x)=y$$

$$\frac{d}{dx}\, g(y(x)) = g'(y)\cdot y'(x)$$

$$\boxed{\int g'(y)\cdot y'(x)\,dx = dg(y(x))}$$

$$\int f(x)\cdot f'(x)\,dx = \left\{ \frac{1}{2} f^2(x) + k \right\}$$

$$\frac{d}{dy} g(y) = 2y$$

$$\boxed{g(y) = y^2}$$

$$f^2(x) = g(f(x))$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} \underset{g'(y)}{f^2(x)} + k\right)_{y'} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} f^2(x)\right) + \underbrace{\frac{d}{dx} k}_{0} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(2 f(x)\cdot f'(x)\right) = \underline{f(x)\cdot f'(x)}$$