**ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 4**

Trieste, 8 novembre 2020

1. Sia $w_1, \ldots, w_m$ una base del sottospazio $W$ di $V$ , e sia
$$w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_n$$
un suo prolungamento a una base di $V$ . Dimostrare che le classi d'equivalenza $[v_{m+1}], \ldots, [v_n]$ costituiscono una base dello spazio vettoriale quoziente $V/W$ (introdotto nel foglio 2, esercizio 2).

2. Si consideri il seguente sistema lineare a coefficienti in $\mathbb{R}$:
$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 3. \end{cases}$$
Scrivere la matrice $A$ dei coefficienti e la matrice completa $A'$ del sistema. Applicare l'algoritmo di Gauss per trasformarle in matrici a gradini, indicando i gradini e i pivot. Scrivere poi il nuovo sistema lineare a gradini, indicare i parametri liberi, trovare lo spazio delle soluzioni $W$ del sistema omogeneo associato, una base di $W$ e una soluzione particolare del sistema generale.

3. Applicare l'algoritmo di Gauss al seguente sistema lineare:
$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_4 & = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 & = 8 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_4 & = b \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = 2. \end{cases}$$
Indicare i pivot, dire per quali valori di $b$ il sistema è compatibile, determinare lo spazio delle soluzioni e la sua dimensione.

4. Si consideri il sistema lineare omogeneo avente $M$ come matrice associata: $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a+2 \\ 2a+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.
Discutere e risolvere il sistema al variare di $a \in \mathbb{R}$.