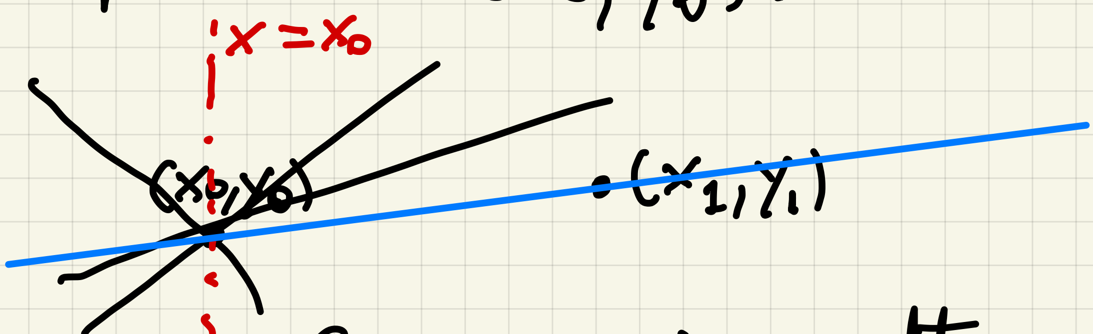
9 Novembre

Lemma Dati (x_0, y_0) e (x_1, y_1) con $x_0 \neq x_1$ allora la retta per questi due punti ha equazione

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Dim Si fissa uno dei due punti, in particolare (x_0, y_0).



Considero la generica retta per (x_0, y_0) che ha equazione

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

$$\left(\frac{y - y_0}{m} = x - x_0 \qquad m = \infty \implies x - x_0 = 0 \right)$$

$$y_1 - y_0 = m(x_1 - x_0)$$

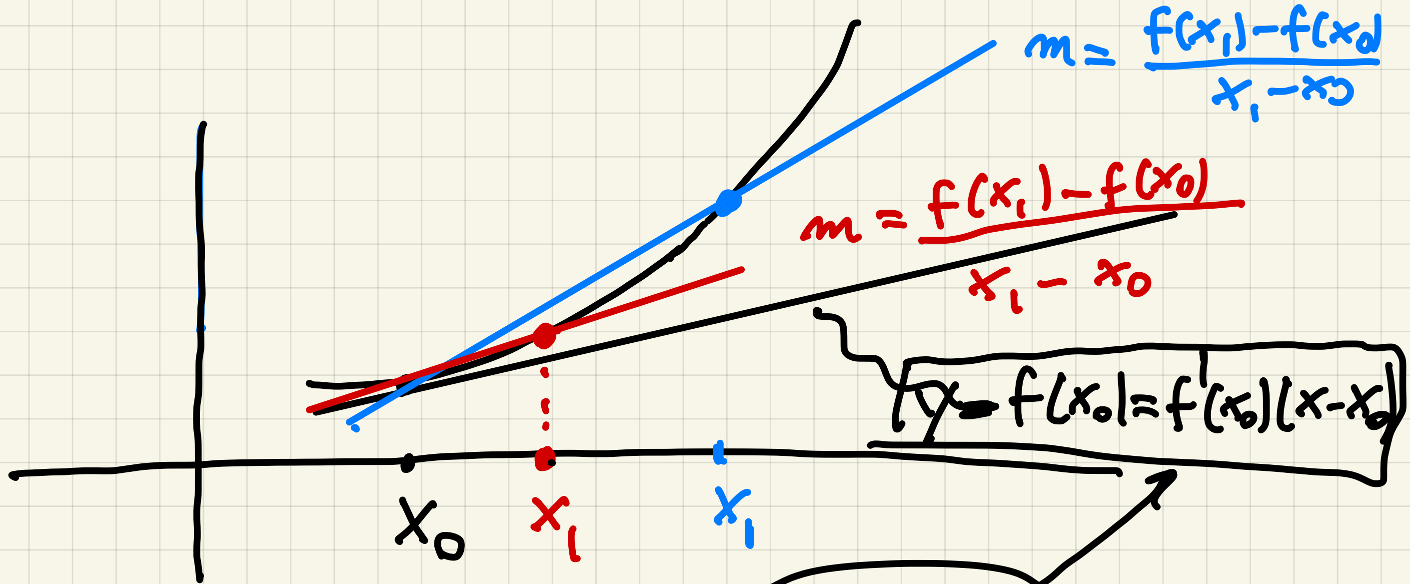
$$\implies m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \qquad \square$$

Def Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I un intervallo aperto e sia $x_0 \in I$. Allora, se esiste ed è finito il $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ diciamo che f ha derivata nel punto x_0, denotiamo il limite con $\boxed{f'(x_0)}$ o con $\boxed{\frac{d}{dx} f(x_0)}$ e lo chiamiamo derivata di f nel punto x_0.

Diciamo che f è derivabile in I se $f'(x)$ esiste $\forall\, x \in I$. Se poi $f' \in C^0(I)$ scriviamo che $f \in C^1(I)$

Def Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I aperto, $x_0 \in I$ e supponiamo esista $f'(x_0)$. La retta tangente al grafico $y = f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$ è la retta di equazione

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$



$$y - y_0 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

Esempi 1) Se $t \in [t_0, t_1] \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}$ allora $x'(t)$ è la velocità istantanea del punto mobile nel punto t.

2) Se $t \in [t_0, t_1] \longrightarrow n(t) \in \mathbb{R}$ allora $n'(t)$ è l'incremento istantaneo nel momento t.

3) Modello SIR è il modello standard per rappresentare una epidemia

$(c)' = 0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{c(x) - c(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0$$

$(e^x)' = e^x$

$$\lim_{y \to x} \frac{e^y - e^x}{y - x} = \qquad y = h + x$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

$$= e^x$$

$(\sin x)' = \cos x \quad , \quad (\cos x)' = -\sin x.$

$$\lim_{y \to x} \frac{\sin(y) - \sin(x)}{y - x} \qquad y = h + x$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h+x) - \sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)\cos(x) + \cos(h)\sin(x) - \sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\sin(h)}{h} \cos(x) + \frac{(\cos(h) - 1)}{h} \sin(x) \right]$$

$$= \cos(x) \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h}}_{1} + \sin(x) \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h}}_{0}$$

$$= \cos(x).$$

<u>Lim notevole</u> $\quad \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}.$

Lim notevole $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

$\forall \ \alpha \in \mathbb{R}$.

Lemma Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e consideriamo $x^\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Si ha

$$(x^\alpha)' = \alpha \, x^{\alpha - 1}$$

Dim

$$\lim_{y \to x} \frac{y^\alpha - x^\alpha}{y - x} = \qquad y = h + x$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^\alpha (1 + \frac{h}{x})^\alpha - x^\alpha}{h} =$$

$$= x^{\alpha-1} \lim_{h \to 0} \frac{(1 + \frac{h}{x})^\alpha - 1}{h/x} = x^{\alpha-1} \alpha$$

dove ho usato

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \qquad \square$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\, x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}\, x^{-\frac{2}{3}} \quad \forall\, x \neq 0$$

Es $\quad (\lg x)' = \dfrac{1}{x}$

$y = x+h$

$$\lim_{y \to x} \frac{\lg y - \lg x}{y - x} = \lim_{h \to 0} \frac{\lg(x+h) - \lg(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\lg\left(x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right) - \lg(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\lg\left(1+\frac{h}{x}\right) + \cancel{\lg(x)} - \cancel{\lg(x)}}{h}$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \frac{\lg\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h/x} = \frac{1}{x}$$

uando $\quad \lim_{y \to 0} \dfrac{\lg(1+y)}{y} = 1$

Lemma Se $f'(x_0)$ esiste allora $f(x)$ e' continua in x_0

Teor (Regole) Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, e $f'(x_0)$ e $g'(x_0)$ esistono. Allora

1) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

2) $(c f)'(x_0) = c\, f'(x_0)$

($\frac{d}{dx}(a f + b g) = a \frac{d}{dx} f + b \frac{d}{dx} g$ in x_0)

3) $(f g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$

4) $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{1}{g^2(x_0)}\, g'(x_0)$

5) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Dimostriamo la regola del prodotto

$$\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)\,g(x)-f(x_0)\,g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \frac{f(x)\,g(x)-f(x_0)\,g(x)+f(x_0)\,g(x)-f(x_0)\,g(x_0)}{x-x_0} .$$

$$= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,\underbrace{g(x)}\, + \,\underbrace{f(x_0)}\,\underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$$

è il limite cercato.

Teor (Regola della catena) Siano I e J due intervalli, $f: I \to J$ e $g: J \to \mathbb{R}$. Siano inoltre $x_0 \in I$ e sia $y_0 = f(x_0) \in J$. Assumiamo che esistano $f'(x_0)$ che $g'(y_0)$.

Allora
$$\left(g(f(x))\right)'(x_0) = g'(y_0)\, f'(x_0)$$

Notazione Se denoto la funzione f con $y(x)$, allora il teorema dice

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d\, g(y(x))}{dx} = \frac{dg}{dy} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{dy} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x))\, f'(x)$$

Esempio

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

$\frac{1}{f(x)} = g(f(x))$ dove $g(y) = y^{-1}$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)}\Big|_{x=x_0} = g'(f(x_0))\, f'(x_0) =$$

$$g'(y) = -1\, y^{-1-1} = -y^{-2}$$

$$= -\frac{1}{f^2(x_0)}\, f'(x_0)$$

1) $\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)}\, f'(x)$

2) $(a^x)' = \left(e^{\lg a^x}\right)' = \left(e^{x \lg a}\right)'$

$= e^{x \lg a}\, (x \lg a)' = e^{x \lg a} \lg a\, \underbrace{(x)'}_{1}$

$= a^x \lg a$