$$\begin{cases} a_0 = a_0 \\ a_{n+1} = q\, a_n \end{cases}$$

Progressione geometrica di ragione q $(q \neq 1)$ e dato iniziale a_0

$a_0 \quad a_1 = q a_0 \quad a_2 = q^2 a_0 \quad \ldots \; a_n = q^n a_0$

Vogliamo trovare un'espressione per

$$\left\{ S_n = \sum_{k=0}^{n} q^n a_0 \right\}$$

Nel caso del test

$a_0 = 1 \qquad q = \begin{cases} 1/3 \\ 1/4 \end{cases}$

$$S_n = \underline{a_0} + \underbrace{a_0 q}_{a_1} + \underbrace{a_0 q^2}_{a_2} + \dots + \underbrace{a_0 q^n}_{a_n}$$

$$= a_0 \cdot \left(1 + q + q^2 + \dots + q^n\right)$$

$$q S_n = a_0 q + a_0 q^2 + \dots \; a_0 q^n + \underline{a_0 q^{n+1}}$$

$q \neq 1$

$$S_n - q S_n = a_0 - a_0 q^{n+1} = a_0 \cdot (1 - q^{n+1})$$

$$\| \qquad \Rightarrow \quad S_n = a_0 \cdot \frac{(1 - q^{n+1})}{1 - q}$$

$$S_n (1 - q)$$

Limiti notevoli

① $a > 0$ $\qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

Caso facile $a = 1$ $\qquad \sqrt[n]{\underline{1}} = \underline{1} \ \forall n$

$\left(a_n = \sqrt[n]{a} \right)$

$\boxed{a > 1}$ $\qquad \sqrt[n]{a} > 1$

$$a_n - 1 = \sqrt[n]{a} - 1 = b_n > 0$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = 1 + b_n}$$

$(1+x)^n \geq 1 + nx$

Bernoulli

$$a = (1+b_n)^n \geq 1 + n b_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$$\Uparrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{a-1}{n} \geq b_n \geq 0$$

Per confronto $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$

Se infine $0 < a < 1$

consideriamo $a' = 1/a > 1$

Per sopra
$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a'} = 1 = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = 1}$$

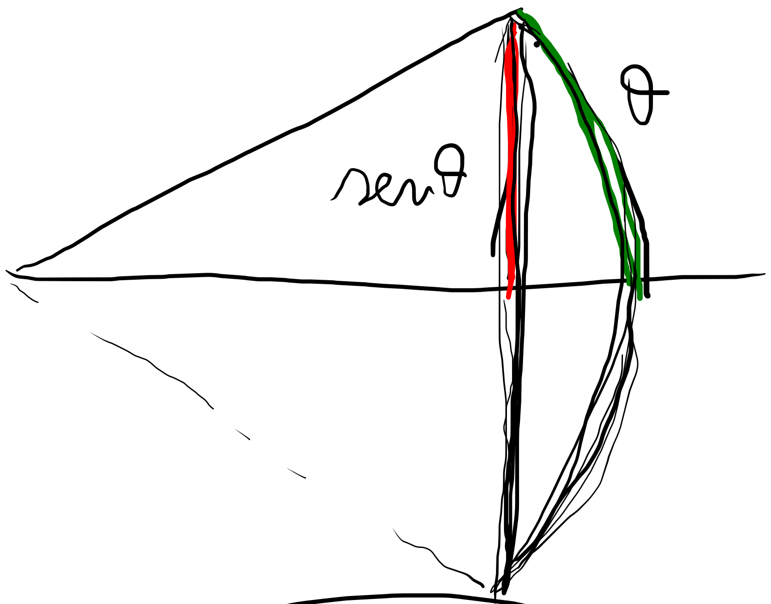
② Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione infinitesima

Allora

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} = 1}$$

Geometricamente, se θ è piccolo

$$\boxed{\operatorname{sen}\theta \simeq \theta}$$



$0 \leq \theta < \pi/2$

$0 \leq \operatorname{sen}\theta \leq \theta$ $\Rightarrow$ per confronto

$$\boxed{2\theta \geq 2\operatorname{sen}\theta}$$

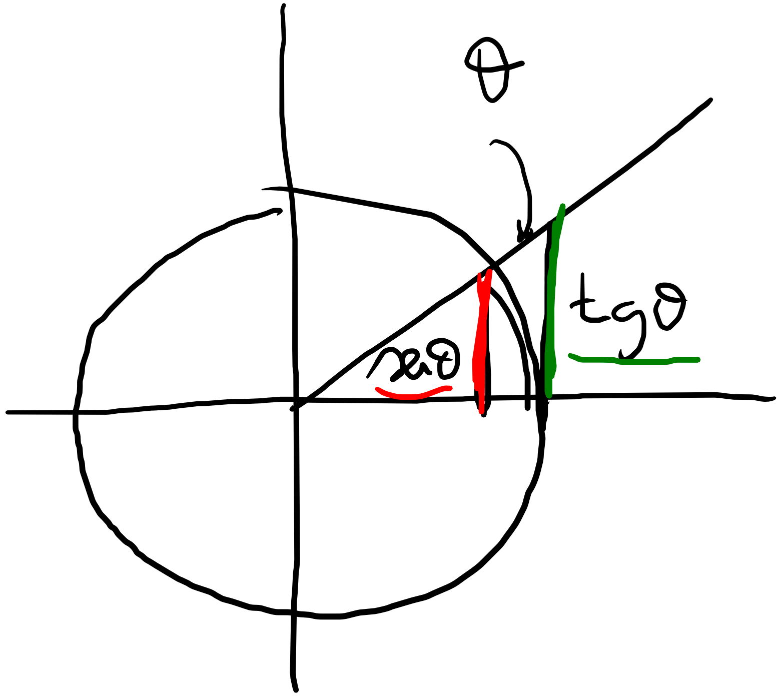
$0 \leq |\operatorname{sen}(a_n)| \leq |a_n|$

$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen} a_n = 0$

se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima

$$\cos\theta = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} \qquad 0 \le \theta < \pi/2$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} \cos a_n = 1} \qquad \text{se} \qquad a_n \to 0$$



$$\operatorname{sen}\theta \le \theta \le \operatorname{tg}\theta \qquad 0 \le \theta < \pi/2$$

$$\begin{array}{c}\\ \text{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}\parallel \\ \text{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\end{array}$$

Se $a_n \to 0$

$$\operatorname{sen}|a_n| \le |a_n| \le \operatorname{tg}|a_n| \qquad \forall n > n_0$$

Supponiamo $a_n \to 0$ $\quad a_n > 0$

$$\operatorname{sen} a_n \le a_n \le \operatorname{tg} a_n = \frac{\operatorname{sen} a_n}{\cos a_n}$$

$\boxed{a_n \ne 0}$ divido per $\operatorname{sen} a_n$

$\operatorname{sen} a_n > 0$ se $a_n > 0$ $\left(a_n < \pi/2\right)$

$\left(\operatorname{sen} a_n < 0\right.$ se $a_n < 0$ $\left(a_n > -\pi/2\right)$

$$\boxed{1} \le \frac{a_n}{\operatorname{sen} a_n} \le \boxed{\frac{1}{\cos a_n}} \longrightarrow 1$$

Per confront

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{\operatorname{sen} a_n} = 1$$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} = 1$$

se $a_n \to 0$ $a_n > 0$

Se $a_n < 0$

$$\cos\vartheta = \cos(-\vartheta)$$

$$1 \geq \frac{a_n}{\operatorname{sen} a_n} \geq \frac{1}{\cos a_n} \longrightarrow 1$$

per confronto anche in questo caso

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} = 1}$$

Es

$$\lim_{n \to +\infty} n \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{n} = 1$$

Infatti

$$n \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{n} = \boxed{\frac{\operatorname{sen} 1/n}{1/n}}$$

$\left\{ a_n = \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$

$n = \frac{1}{1/n}$

3

$$\lim_{n\to+\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = e$$

$$2 < e < 3$$

$$e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

$$e = 2{,}71$$

$$e \simeq \frac{878}{323}$$

Lemma

$$\boxed{\left\{ a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n\in\mathbb{N}}} \text{ è monotona crescente}$$

$$\left\{ b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \right\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ è monotona decrescente.}$$

Oss

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= a_n \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\geqslant 1}$$

$$\Downarrow$$

$$b_n \geqslant a_n$$

Mostriamo che

$$\left\{ a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right\}_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n>0}}$$ è monotona crescente

$$\boxed{a_n > a_{n-1}}$$

Vera per $n=2$

$$a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \qquad a_1 = 2^1 = (1+1)^1$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9/4 > 2 \quad \checkmark$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$=$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$\parallel$$

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = a_{n-1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \qquad \boxed{n \geq 2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \geq 1 - \frac{1}{n}$$

$$\left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n$$

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \geqslant 1-\frac{1}{n}$$

$$\boxed{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n}$$

Applico la disuguaglianza di Bernoulli con $x = -\frac{1}{n^2}$

$\boxed{(1+x)^n \geqslant 1+nx}$ $\boxed{x \geqslant -1}$

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geqslant 1-\frac{1}{n^2}\cdot n = 1-\frac{1}{n}$$

In modo analogo si mostra che

$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è monotone decrescente

$$\begin{array}{l} a_1 \le a_2 \le a_3 \ldots\ldots \le a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ \parallel \\ 2 = \left(1+1\right)^1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} b_n \le \ldots\ldots \le b_3 \le b_2 \le b_1 \\ \parallel \qquad\qquad\qquad\qquad \parallel \\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+n} \qquad\qquad \left(1+1\right)^2 = 4 \end{array}$$

Vi ricordo che

$$a_n \leq b_n = a_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \left\{ a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right\}_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n>0}} \text{ è convergente}$$

essendo monotona (crescente) e limitata (superiormente)

Indichiamo con e il

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} a_n =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} a_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} b_n = \underline{\underline{e}}$$

$$\boxed{2 < e < 4}$$

Definiamo la funzione

$$x \longmapsto e^x$$ (esponenziale di base e)

in questo modo

$$\boxed{e^x = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$$

In generale si può mostrare che se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione infinitesima allora

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e}$$

(Nel nostro caso $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}$)

Fissato $x \in \mathbb{R}$

$$b_n = \frac{x}{n} \longrightarrow 0$$

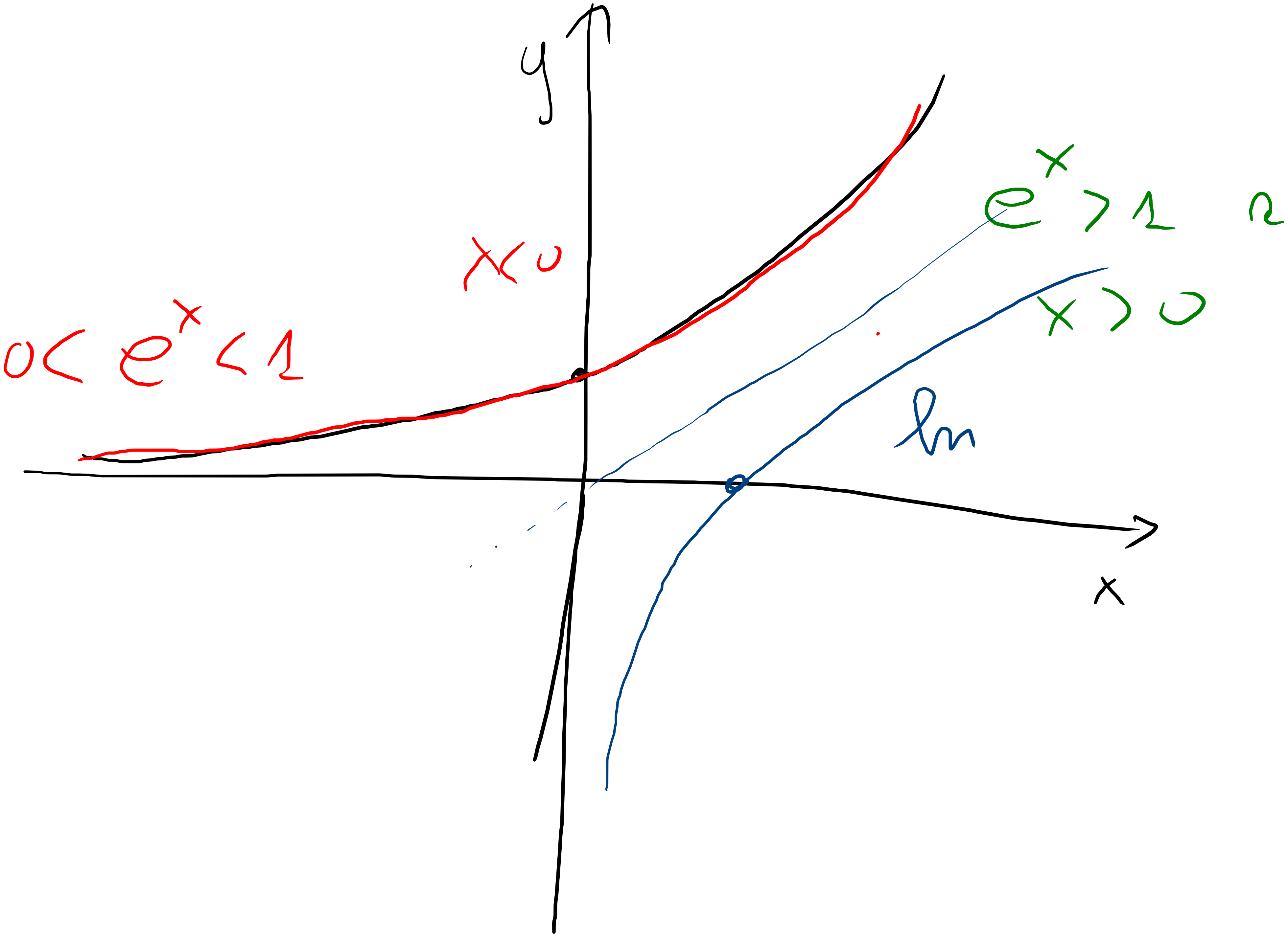
$$\left(1+b_n\right)^{\frac{1}{b_n}} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}} \longrightarrow e.$$

$$\boxed{e^x = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x}$$

Prop e^x è ben definito $\forall x \in \mathbb{R}$

Inoltre $e^0 = 1$ $\quad e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Di più e^x assume tutti i valori reali compresi tra 0 e $+\infty$ ed è monotona crescente come funzione reale di variabile reale.



y
x
$x<0$
$0<e^x<1$
$e^x>1$
$x>0$
ln

Pertanto la funzione $x \mapsto e^x$

è invertibile e l'inversa prende

il nome di logaritmo (naturale) o di base e

$\log_e$ $\ln$ è definito per x positivi

$\boxed{x > 0}$

$$\log_e x = \ln x > 0 \quad \text{se } x > 1$$

$$\log_e x = \ln x < 0 \quad \text{se } 0 < x < 1$$

$$\boxed{\log_e 1 = \ln 1 = 0}$$

$$\boxed{e^{\ln x} = \left(\ln e^{x}\right) = x \qquad \forall x}$$