Esempio $g(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 1$ $\boxed{x^2 - xy + y^2 = 1}$ vincolo

$f(x,y) = xy$ Massimo / Minimo $f(x,y)$ con $g(x,y) = 0$

$\nabla g(x,y) = (2x - y, -x + 2y)^T$ $\nabla f(x,y) = (y, x)^T$

$$\begin{cases} y = \lambda(2x - y) \\ x = \lambda(2y - x) \\ x^2 - xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

$\rightarrow x + y = 2\lambda x - \lambda y + 2\lambda y - \lambda x = \lambda x + \lambda y = \lambda(x+y)$

$(x+y) - \lambda(x+y) = 0$ $\quad (x+y)(1-\lambda) = 0$ $\rightarrow x + y = 0$; $\lambda = 1$

caso $y = -x$ $\quad x^2 + x^2 + x^2 = 1$ $\quad x^2 = \frac{1}{3}$ $\quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$ $\quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$

caso $\lambda = 1$ $\quad y = 2x - y \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow y = x$ $\quad x^2 - x^2 + x^2 = 1$

$x = \pm 1$ $\quad (-1, -1)^T$ $\quad (1,1)^T$

$P = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T$

$f(P) = -\frac{1}{3}$

$\parallel$

$f(-P) = -\frac{1}{3}$

$f(x,y) = xy$

$\underline{\text{Max } f = 1}$

$Q = (-1,-1)^T$

$f(Q) = 1$

$-Q = (1,1)^T$

$\underline{\text{Min } f = -\frac{1}{3}}$

$$g(x,y) = (x-1)^3 - y^2 \qquad \nabla g = (3(x-1)^2, -2y)^T$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad \nabla f = 2(x,y)^T$$

Il sistema non ha soluzioni

$x = 1 \Rightarrow x = 0$ impossibile

$$\begin{cases} 2x = 3\lambda(x-1)^2 \\ 2y = -2\lambda y \\ (x-1)^3 = y^2 \end{cases}$$

$\Leftarrow 2y(1+\lambda) = 0 \Rightarrow \boxed{\cancel{y=0}} \vee \boxed{\lambda = -1}$

$\Leftarrow (x-1)^3 \geq 0 \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

se $y = 0$ $x = 1$

se $\lambda = -1$ $2x = -3(x-1)^2 \leq 0$

$(1,0)^T \in Z_g$ $\quad g(1,0) = 0 \quad f(1,0) = 1$

$(1,0)^T$ è punto di minimo vincolo

$\boxed{f(x,y) = x^2 + y^2 \geq 1}$ $\quad \{ x \geq 1$

$(x-1)^3 - y^2 = 0 \quad (x-1)^3 = y^2 \Rightarrow (x-1)^3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

$x^2 \geq 1$

$\nabla g(x_0, y_0) \neq (0,0)^T$ $\qquad (3(x-1)^2, -2y)^T$

$\nabla g(1,0) = (0,0)^T$!!!

Vincolo: curve di $\mathbb{R}^2$

- esplicito
  - parametrizzato
  - grafico
- implicito (Z_g)

$\Omega = A \cup \partial A$

A: aperto

∂A: bordo: curve

$\mathbb{R}^3$ vincoli 1) superficie in $\mathbb{R}^3$

- esplicita
  - parametrica
  - grafico
- implicita Z_g

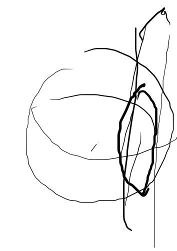
2) dominio A o ∂A

A: aperto

∂A: superficie

3) curve in $\mathbb{R}^3$

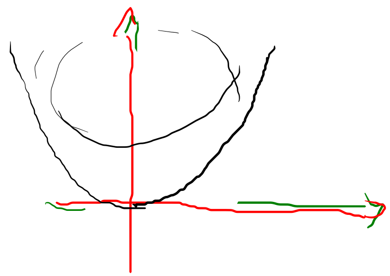
- esplicita parametrica
- implicita: intersezione di due superfici del tipo $Z_{g_1} \cap Z_{g_2}$



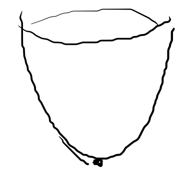
Esempio: $E = \{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : z \in [0,1], \ x^2+y^2 \le z \}$

$f(x,y,z) = x - z$ Determinare min/max f vincolato ad E

Caso: $y=0$



$z = x^2$



<u>Primo</u>: studiare f nell'interno di E : $\{ 0 < z < 1, \ x^2+y^2 < z \}$.

$\nabla f(x,y,z) = (1, 0, -1)^T$ non si annulla mai.

Secondo: studiamo f sul bordo  

∂E = Paraboloide $\cup$ Disco

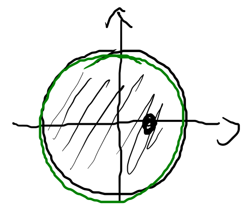
Sul paraboloide: $x^2+y^2=z$ con $0 \le z \le 1$

$\leftarrow$ dom φ

è il grafico della funzione $\varphi(x,y) = x^2+y^2$ dom φ = ?

Parametrizzo $\sigma(x,y) = (x, y, x^2+y^2)^T$ con $(x,y)^T \in \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$

$h(x,y) = f(x,y,x^2+y^2) = x - x^2 - y^2$



Primo: studio all'interno in $B(0,1)$

$\nabla h(x,y) = (1-2x, -2y)^T = (0,0)^T \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad y = 0 \rightsquigarrow \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right)^T$

Secondo: sul bordo $x^2+y^2=1$ $h(x,y) = x-1$ $x \in [-1,1]$ min $= -2$ max $= 0$

in $x=-1$ $y=0$ $z=1$ $(-1, 0, 1)^T$

in $x=1$ $y=0$ $z=1$ $(1, 0, 1)^T$

$\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right)^T \qquad (1, 0, 1)^T \qquad (-1, 0, 1)^T$

Sul disco ? $\quad D = \{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2 \le 1, \quad z = 1 \}$

$f(x,y,z) = x - z \qquad z = 1 \; !! \qquad f(x,y,z) = x - 1$

Sul disco x può variare tra -1 e 1 $\qquad \min f = -2 \qquad \max f = 0$

$(-1, 0, 1)^T \qquad (1, 0, 1)^T$

MAX $\qquad\qquad\qquad$ MIN

$f\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \qquad f(1,0,1) = 0 \qquad f(-1,0,1) = -2$

Teorema della funzione implicita (superficie in $\mathbb{R}^3$)

$g \in C^1(A, \mathbb{R})$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto, $\quad Z_g = \{(x,y,z)^T \in A : g(x,y,z) = 0\}$ $\quad (x_0, y_0, z_0)^T \in Z_g$

Supponiamo $\displaystyle \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. $\qquad \displaystyle \frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$

$(x_0, z_0)^T$ $\qquad y_0$

Allora esistono un intorno U di $(x_0, y_0)^T$, un intorno V di z_0 e una

ψ $\qquad (x, \psi(x,z), z)$

funzione $\varphi : U \to V$ continua tale che $\{(x, y, \varphi(x,y))^T \in A : (x,y)^T \in U\} =$

$= Z_g \cap (U \times V)$. Inoltre $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$ e si ha $\quad (x,z)^T \in U$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, \varphi(x,y))}{\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, \varphi(x,y))} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, \varphi(x,y))}{\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, \varphi(x,y))}$$

Corollario: Teorema di parametrizzazione locale

Sia $g \in C^1(A, \mathbb{R})$ $\quad (x_0, y_0, z_0)^T \in Z_g$ $\quad \boxed{: \nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)^T}$

Allora esiste una parametrizzazione locale di Z_g in un intorno di $(x_0, y_0, z_0)^T$, cioè esistono un intorno W di $(x_0, z, z_0)^T$ e una $\sigma : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

σ superficie regolare tale che $\{ \sigma(s,t) : (s,t)^T \in \Omega \} = Z_g \cap W$.

Dim Per il teorema della funzione implicita, se $\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ si può scrivere $\sigma(s,t) = (s, t, \varphi(s,t))^T$ dove φ è la funzione implicita.

Se $\frac{\partial g}{\partial z} = 0$ ma $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ $\quad \sigma(s,t) = (s, \psi(s,t), t)^T$ ....

Superficie regolare

$\sigma : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad \sigma(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))^T$

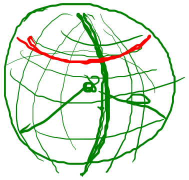
σ C^1 e tale che $\dfrac{\partial \sigma}{\partial s}(s,t)$ e $\dfrac{\partial \sigma}{\partial t}(s,t)$ non siano tra loro paralleli, cioè

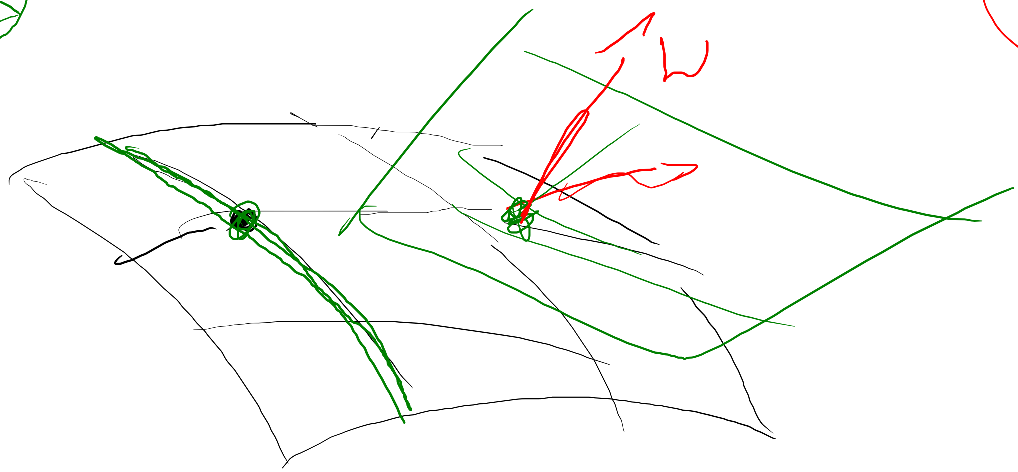
$$\text{rank} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s}(s,t) & \dfrac{\partial x}{\partial t}(s,t) \\ \dfrac{\partial y}{\partial s}(s,t) & \dfrac{\partial y}{\partial t}(s,t) \\ \dfrac{\partial z}{\partial s}(s,t) & \dfrac{\partial z}{\partial t}(s,t) \end{pmatrix} = 2$$

In questo caso il vettore

$$w(s,t) = \frac{\partial \sigma}{\partial s} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial t} \neq (0,0,0)^T$$

vettore normale della superficie





$$\frac{\partial \sigma}{\partial s} \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

$$w = \frac{\partial \sigma}{\partial s} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial t} = (a,b,c)^T$$

$$\sigma(s_0, \cdot) : I \to \mathbb{R}^3$$

$$\sigma(\cdot, t_0)$$

piano tangente $\quad a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$$\pi(u,v) = (x_0,y_0,z_0)^T + u\,\frac{\partial \sigma}{\partial s}(s_0,t_0) + v\,\frac{\partial \sigma}{\partial t}(s_0,t_0)$$

Studio la funzione $h(x,y) = x - \underbrace{(x^2+y^2)}$ ←

sui punti $\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2\}$ tali che $x^2+y^2=1$

quindi $h(x,y) = x - 1$ poiché $x^2+y^2=1 \Rightarrow x \in [-1,1]$

Si poteva anche ragionare così: la curva $x^2+y^2=1$ si può

parametrizzare come $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T$ $t \in [0, 2\pi]$

$\underset{\varphi(t)}{\underset{\parallel}{(h \circ \gamma)}}(t) = \cos t - (\cos^2 t + \sin^2 t) = \cos t$ $t \in [0, 2\pi]$

$$\sigma(s,t) = (s, t, \varphi(s,t))^T \qquad \varphi \text{ funzione esplicita}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial s}(s,t) = \left(1, 0, \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,t)\right)^T$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t}(s,t) = \left(0, 1, \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t)\right)^T$$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial s} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{pmatrix} = 2$$

Teorema del moltiplicatore di Lagrange (superficie in $\mathbb{R}^3$)

$A \subseteq \mathbb{R}^3$ $\quad f, g \in C^1(A, \mathbb{R})$ $\quad (x_0, y_0, z_0)^T \in Z_g$ punto di estremo per f vincolato a Z_g. Sia $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)^T$.

Allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ (moltiplicatore di Lagrange) tale che

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

<u>Dim</u> Per il teorema di parametrizzazione locale esistono W intorno di (x_0, y_0, z_0)

$\sigma : \Omega \to \mathbb{R}^2$ regolare tale che $\{\sigma(s,t) : (s,t)^T \in \Omega\} = Z_g \cap W$

∇g è ortogonale alle sue superfici di livello

infatti $(g \circ \sigma)(s,t) = g(\sigma(s,t)) =$ costante su Ω

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{\partial}{\partial s}(g \circ \sigma)(s,t) = \left\langle \nabla g(\sigma(s,t)), \frac{\partial \sigma}{\partial s}(s,t) \right\rangle$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}(g \circ \sigma)(s,t) = \left\langle \nabla g(\sigma(s,t)), \frac{\partial \sigma}{\partial t}(s,t) \right\rangle$$

Quindi $\nabla g(\sigma(s,t))$ è ortogonale al vincolo

Ora sia $\sigma(s_0,t_0) = (x_0,y_0,z_0)^T$ punto di estremo per f

allora $(s_0,t_0)^T$ è punto di estremo per $f \circ \sigma$, quindi

si ha $(0,0)^T = \nabla(f\circ\sigma)(s_0,t_0) = \left(\quad , \quad \right)^T$

$$\frac{\partial}{\partial s}(f\circ\sigma)(s_0,t_0) = \left\langle \nabla f(\sigma(s_0,t_0)), \frac{\partial \sigma}{\partial s}(s_0,t_0) \right\rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\quad \right)\left(\quad \right) = \left\langle \nabla f\left(\quad \right), \frac{\partial \sigma}{\partial t}(s_0,t_0) \right\rangle$$

$\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ è ortogonale al vincolo

Quindi, essendo $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ entrambi ortogonali allo stesso piano (il piano tangente del vincolo), sono tra loro paralleli e quindi esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$