e numero di Nepero

$$e^x := \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad x \in \mathbb{R}$$

1) e^x è ben definito $\forall x \in \mathbb{R}$

2) e^x è monotone crescente

3) $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \left(1-\underbrace{\frac{x^2}{n^2}}\right)^n < 1$$

se $n > |x|$

$$\frac{x^2}{n^2} > 0$$

se $n > |x| \Rightarrow 1 - \frac{x^2}{n^2} < 1$

Cioè

$$0 < \underline{\underline{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}} < \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n} =$$

se $n > |x|$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}$$

$\left\{ \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n} \right\}$ è una successione monotona DECRESCENTE

Disuguaglianza di Bernoulli)

$$1+x \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{1-x}$$

se $x < 1$

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \geq 1-x$$

$$\frac{1}{1-x} \geq \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}$$

$$e^{x+y} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n$$

$$e^{x} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$e^{y} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n$$

$$\frac{e^{x+y}}{e^x \cdot e^y} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n} =$$

$$= \cdot \frac{}{} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1 + \frac{x+y}{n}}{\left(1+\frac{x}{n}\right) \cdot \left(1+\frac{y}{n}\right)} \right]^n =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1 + \frac{x+y}{n}}{1 + \frac{x}{n} + \frac{y}{n} + \frac{xy}{n^2}} \right]^n =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1 + \frac{x+y}{n}}{1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}} \right]^n =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2} - \frac{xy}{n^2}}{1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}} \right]^n =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[1 - \underbrace{\frac{\frac{xy}{n^2}}{1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}}}_{\downarrow 0} \right] = 1 \checkmark$$

$$\boxed{e^{x+y} = e^x e^y} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

In particolare essendo $e^0 = 1$

risulta che $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

Infatti $\underline{1} = e^0 = e^{x+(-x)} = e^x \cdot e^{-x}$ ✓

$\log_e x = \ln x$ (logaritmo naturale di x)

è inversa di e^x

ossia $\ln(e^x) = x \quad \forall x$ $\boxed{e^{\ln x} = x \quad \forall x > 0}$

1) $\ln x$ è definito $\underline{\forall x > 0}$

2) $\ln 1 = 0$ (infatti $e^0 = 1$)

3) $\ln x$ è monotono crescente

$0 < \ln x$ se $x > 1$ $\quad \ln x < 0$ se $0 < x < 1$

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \qquad x, y \in \mathbb{R}^+$$

Infatti

$$\underline{\underline{e^{\ln(x \cdot y)}}} = x \cdot y = e^{\ln x} \cdot e^{\ln y} =$$

PER LA PROPRIETÀ $e^{x+y} = \underline{\underline{e^x e^y}}$

$$= \underline{\underline{e^{\ln(x) + \ln y}}}$$

ma la funzione esponenziale è iniettiva

$$\Rightarrow \boxed{\ln(x+y) = \ln(x) + \ln(y)}$$

$$1+x < e^x < \frac{1}{1-x} \qquad x < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = u \qquad 1 = (1-x)\cdot u \qquad 1-x = \frac{1}{u}$$

$$\boxed{x = 1 - \frac{1}{u}}$$

$$\boxed{e^{1-\frac{1}{u}} < u}$$

$$e^{1-\frac{1}{u}} < u$$

ln è monotono crescente

$$\Rightarrow \ln\left(e^{1-\frac{1}{u}}\right) < \ln u$$

$$\parallel$$

$$\boxed{1-\frac{1}{u} < \ln u}$$

$$1+x < e^x$$

$\downarrow$ Analogamente

$$\boxed{\ln u < u-1}$$

$$\boxed{1+x < e^x < \frac{1}{1-x}}$$

$$\boxed{1-\frac{1}{u} < \ln u < u-1}$$

Prop

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a l

Allora $\{e^{a_n}=b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a e^{l}.

Dim $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \iff \lim_{n\to+\infty} (a_n-l)=0$

$a'_n =: a_n - l$ $\qquad \{a'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesimo

$$e^{a_n} \longrightarrow e^{\ell} \iff e^{a_n'} \longrightarrow e^{0} = 1$$

$$e^{a_n - \ell} = e^{a_n} \cdot e^{-\ell} = \frac{e^{a_n}}{e^{\ell}}$$

$$e^{-\ell} = \frac{1}{e^{\ell}}$$

$$1+a_n' < e^{a_n'} < \frac{1}{1-a_n'}$$

$\boxed{a_n' \to 0}$

per $n > n_0$

$a_n' < 1$

1 $\qquad$ 1

Per il teorema del confronto

$$\lim_{n\to+\infty} e^{a_n'} = 1$$

Prop Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a $\underline{\underline{\ell > 0}}$

allora $\lim_{n\to+\infty} \ln a_n = \ln \ell$.

Dim Per il Teorema della Permanenza del segno

$a_n > 0 \quad \forall n > n_0$ essendo $\underline{\ell > 0}$

$$\boxed{\ln a_n \longrightarrow \ln \ell}$$

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$$

$x, y > 0$

$$0 = \ln(1) = \ln\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \ln x + \ln \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln \frac{1}{x} = -\ln x}$$

Inoltre $\ln(x/y) = \ln\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = \ln x + \ln \frac{1}{y} = \ln x - \ln y$

$a_n \to \ell > 0$

$$\ln a_n \to \ln \ell \iff \underbrace{\ln a_n - \ln \ell}_{} \to 0$$

$$\ln \frac{a_n}{\ell} \quad u$$

$$\boxed{1 - \frac{1}{u} \leq \ln u \leq u - 1}$$

$$\frac{u-1}{u} \leq \ln u \leq u-1$$

$\iff$

$u - 1 = s$

$u = s + 1$

$$\frac{s}{1+s} \leq \ln(s+1) \leq s$$

$$\frac{s}{1+s} \le \ln(s+1) \le s$$

$a_n \to l$ $\qquad a'_n = \dfrac{a_n}{l} \to 1$

$$\boxed{1 - \frac{1}{a'_n} \le \ln a'_n \le a'_n - 1}$$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

$0 \qquad 0 \qquad 0$

Per il Teorema del Confronto

$$\lim_{n \to +\infty} \ln \frac{a_n}{l} = 0$$

$$= \lim_{n \to +\infty} (\ln a_n - \ln l) = 0$$

$\square$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \ln a_n = \ln l}$$ ✓

Introduciamo per $\forall a$ $\boxed{a = e^{\ln a}}$

$$a^x = \boxed{e^{x \cdot \ln a}} = \left(e^{\ln a}\right)^x$$

$$\underline{a^{x+y}} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x\cdot\ln a + y\ln a} =$$

$$= e^{x\ln a} \cdot e^{y\ln a} = \underline{a^x \cdot a^y}$$

$$\boxed{a^0 = 1} \qquad \forall\, a>0$$

a^x è crescente se $a>1$
decrescente se $a<1$

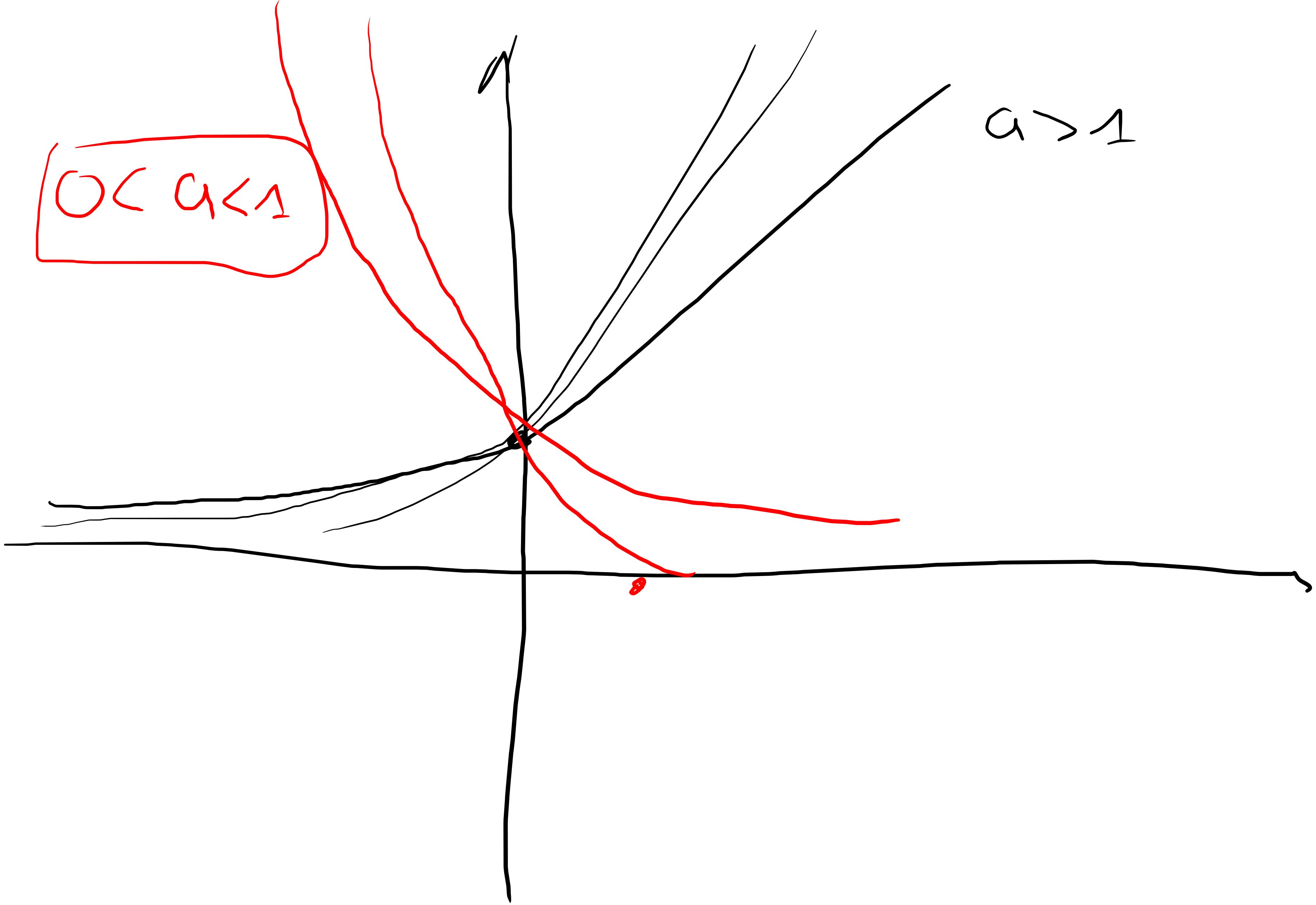
Infatti

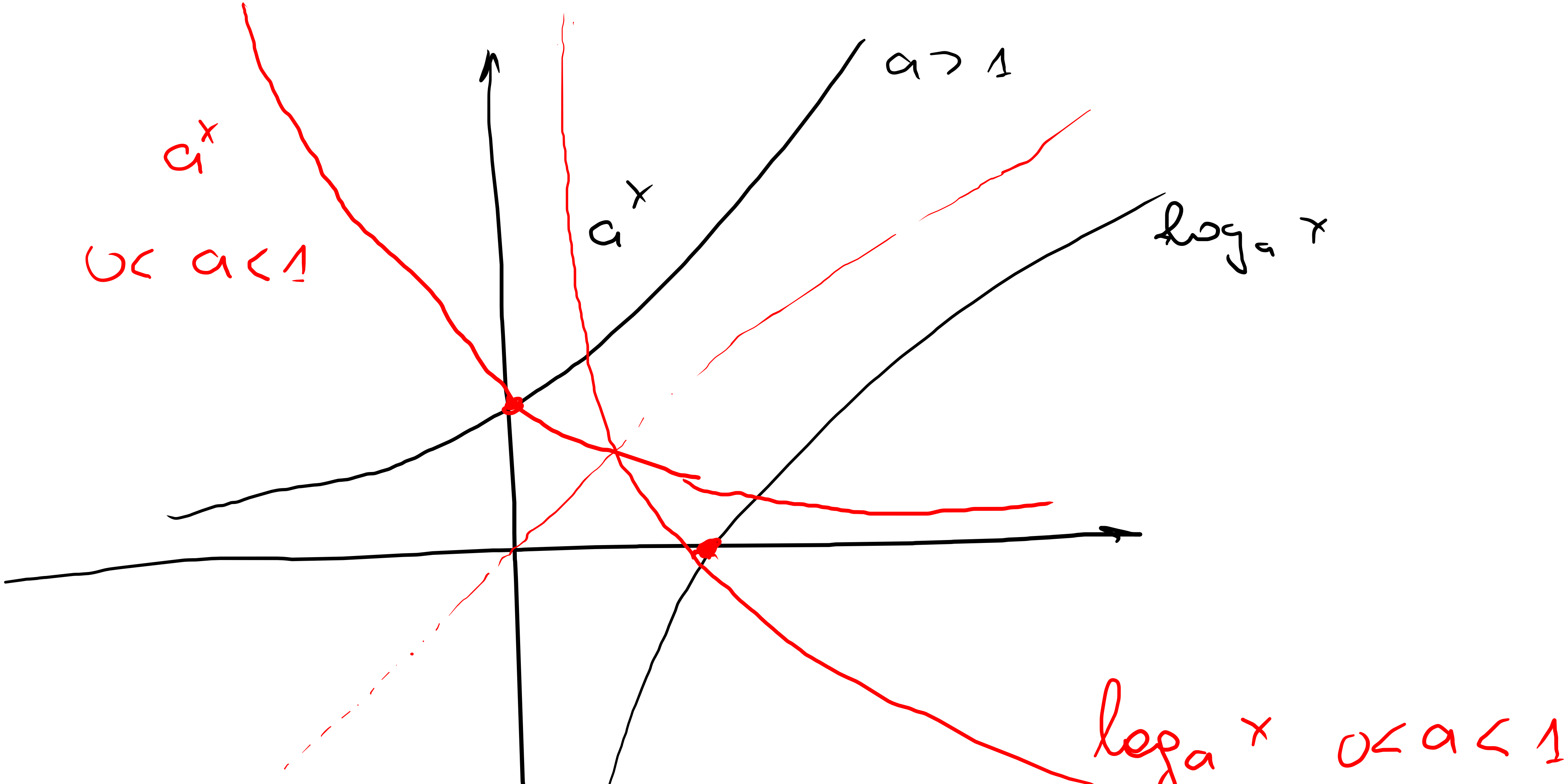
$a^x = e^{x\cdot \ln a}$

$\ln a > 0$ se $a>1$
$\ln a < 0$ se $0<a<1$

L'inversa della funzione $x \mapsto a^x$ è detta logaritmo in base a. e indicata con $\log_a x$

$$\log_a a^x = x \quad \forall x \qquad \underbrace{a^{\log_a x} = x}_{x>0}$$


0< a<1
a>1



$a < 0$

$0 < \log_a x \qquad 0 < x < 1$

$\log_a x < 0 \qquad x > 1$

$$a^x = e^{x \cdot \ln a}$$

$$e^{\ln x} = x = a^{\log_a x} = \left(e^{\ln a}\right)^{\log_a x} = e^{\ln a \cdot \log_a x}$$

Essendo l'esponenziale iniettiva si ricava

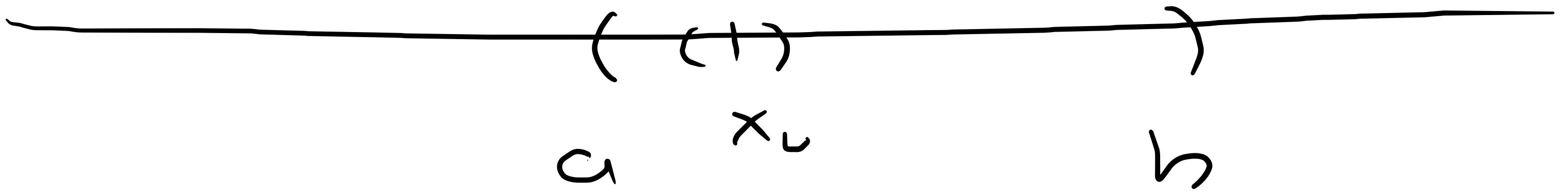
$$\boxed{\ln x = \ln a \cdot \log_a x} \qquad (a \neq 1)$$

Def Sia A un insieme di numeri reali

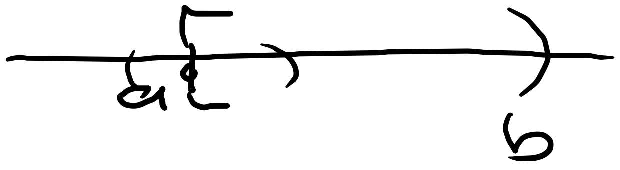
Diremo che $x_0 \in A$ è INTERNO ad A se

$\exists$ un intorno I_{x_0} di x_0 contenuto in A

Es Nell'intervallo $(a,b) =]a,b[$ ogni x_0 è interno all'intervallo $]a,b[$



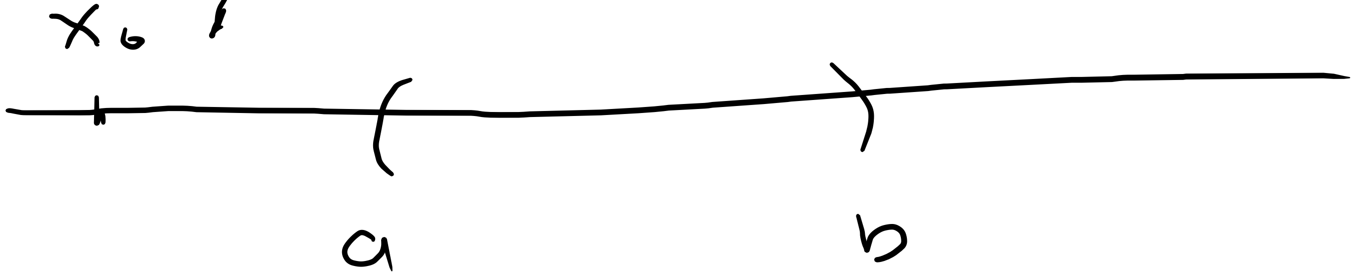
Nell'intervallo $[a,b[= \{ a \leq x < b \}$



il punto a NON è interno all'intervallo.

Def Sia A un insieme di numeri reali. Diremo che $x_0 \notin A$ è esterno ad A se $\exists$ un intorno I_{x_0} di x_0 non contenuto in A.

è esterno all'intervallo $(a,b) =]a,b[$, ma



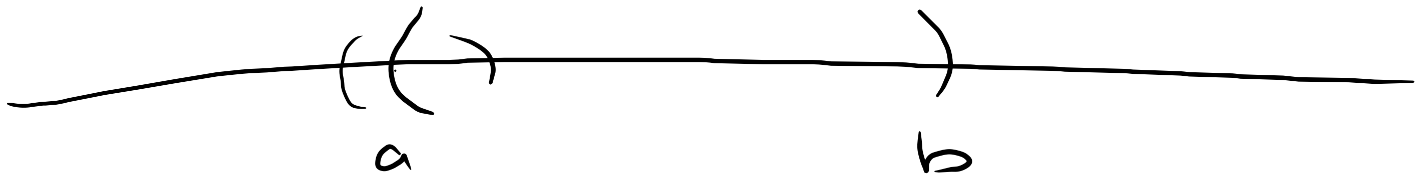
né a né b sono esterni all'intervallo $]a,b[$.

Def Sia A un insieme di numeri reali.
Diremo che x_0 è un punto di accumulazione per A se preso comunque un intorno I_{x_0} di x_0, allora esiste $a \in A$ tale che $a \in I_{x_0}$, ossia

$$A \cap I_{x_0} \neq \emptyset.$$

Oss Ogni punto interno di A è di accumulazione per A.
Ogni punto esterno di A NON è di accumulazione per A.

$A =]a,b[$



a è di accumulazione per $]a,b[$

b " " " " $]a,b[$

Sia f una funzione reale di variabile reale. Si indichi con $\mathrm{Dom}\, f \subseteq \mathbb{R}$ il dominio di f.

Sia x_0 punto di accumulazione di $\mathrm{Dom}\, f$.

Diremo che f ha limite $l \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ al tendere di x a x_0, in simboli

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = l}$$

se , comunque preso una successione

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \text{Dom} f$ tale che

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = x_0}$$

risulta che b_n

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = l}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Osservo che $0 \notin \text{Dom} f$ ma è punto di accumulazione di $\text{Dom} f$.

Gli altri punti di accumulazione di $\text{Dom} f$ (esclusi i punti interni) sono $-\infty$ e $+\infty$.

① $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq 1}}$ $\qquad \frac{1}{n}\to 0$ è l'infinitesimo

$$\boxed{\frac{1}{n}>0 \quad \forall n\geq 1}$$

$$\frac{1}{n}\in(0,+\infty)$$

$$b_n=f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)}=n\longrightarrow+\infty$$

② $\left\{-\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (-\infty; 0) \qquad -\frac{1}{n} \longrightarrow 0$

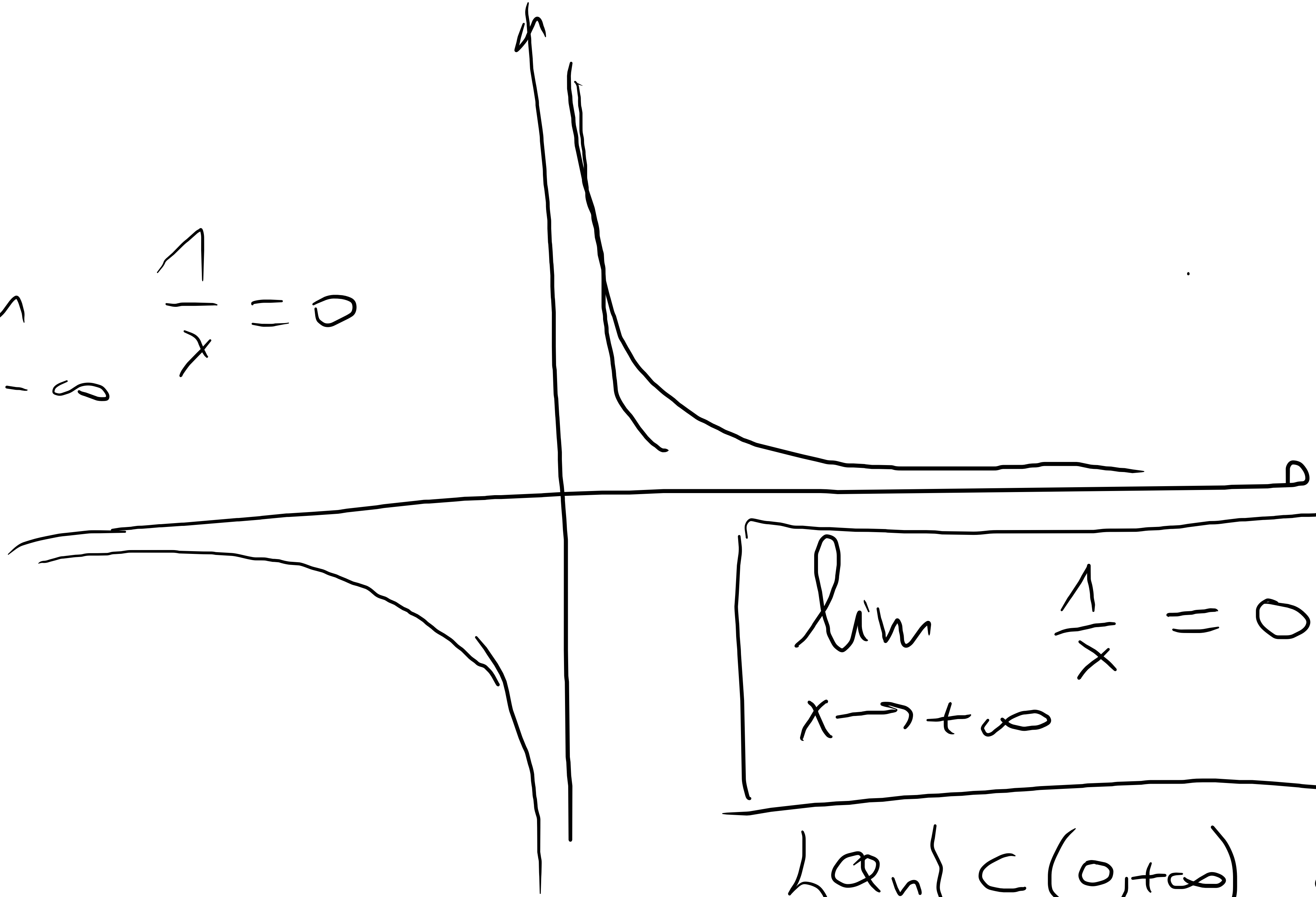
$$f\left(-\frac{1}{n}\right) = b_n = \frac{1}{\left(-\frac{1}{n}\right)} = \underline{-n \longrightarrow -\infty}$$

③ $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\} \subset \mathrm{Dom}\, f \qquad \frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0$

$$b_n = f\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{1}{\frac{(-1)^n}{n}} = (-1)^n \cdot n$$

NON ho <u>limite</u>

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$



$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0}$$

$\{a_n\} \subset (0, +\infty)$ $\quad a_n \to +\infty$

$0 < \underline{\frac{1}{a_n}}$ è infinitesimo