① $[v_{m+1}], \dots, [v_n]$ generatori di V/W?

$[v] \in V/W$. $\quad v = \sum_{i=1}^{m} a_i w_i + \sum_{j=m+1}^{n} b_j v_j \Rightarrow [v] = \left[\sum a_i w_i + \sum b_j v_j\right] = \sum_{i=1}^{m} a_i [w_i] + \sum_{j=m+1}^{n} b_j [v_j]$

$\forall i = 1, \dots, m \quad w_i \in W$. Ricordiamoci: $[v] = [v'] \Leftrightarrow v - v' \in W$. Quindi, $\forall i = 1, \dots, m \; [w_i] = [0]$

$\Rightarrow [v] = \underbrace{\sum a_i [w_i]}_{=[0]} + \sum_{j=m+1}^{n} b_j [v_j] = \sum_{j=m+1}^{n} b_j [v_j]$ //.

$[v_{m+1}], \dots, [v_n]$ lin. indipendenti?

$\sum_{j=m+1}^{n} b_j [v_j] = [0] \Leftrightarrow \left[\sum_{j=m+1}^{n} b_j v_j\right] = [0] \Leftrightarrow \sum_{j=m+1}^{n} b_j v_j \in W \overset{w_1, \dots, w_m \text{ BASE DI } W}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \exists a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}$ s.t. $\sum_{j=m+1}^{n} b_j v_j = \sum_{i=1}^{m} a_i w_i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} (-a_i) w_i + \sum_{j=m+1}^{n} b_j v_j = \underline{0}$. $\quad \underset{\text{base di } V}{w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n} \Rightarrow \begin{cases} \forall i \; a_i = 0 \\ \forall j \; b_j = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \forall j \; b_j = 0 \Rightarrow [v_{m+1}], \dots, [v_n]$ l.i. ///.

② $\begin{cases} x_1 \quad -x_3 + 3x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 \quad + x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 \quad + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 \quad - x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases}$.

La matrice dei coefficienti è $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$,

La matrice completa è $A' = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 & 3 & 3 \end{array}\right)$.

Lavoriamo direttamente sulla matrice completa.

ALGORITMO DI GAUSS (CON SEGNALATI PIVOT E GRADINI)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 + R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1}]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & -5 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & -5 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

x_3, x_5 PARAMETRI LIBERI.

TORNIAMO AL SISTEMA (risolviamo in funzione di x_3 e x_5.)

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 2x_5 = -2 \\ 2x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 - 3x_4 - x_5 \\ x_2 = 2 + 2x_3 - 5x_4 - 2x_5 \\ x_4 = 1 - x_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 + x_3 + 2x_5 \\ x_2 = -3 + 2x_3 + 3x_5 \\ x_4 = 1 - x_5 \end{cases}$$

La generica soluzione del sistema non omogeneo è dunque

$(-2 + x_3 + 2x_5, -3 + 2x_3 + 3x_5, x_3, 1 - x_5, x_5)$, al variare di $x_3, x_5 \in \mathbb{R}$.

Questo può essere scritto come $(-2,-3,0,1,0) + x_3(1,2,1,0,0) + x_5(2,3,0,-1,1)$.

Visto che $(-2,-3,0,1,0)$ è una soluzione del sistema non-omogeneo, abbiamo che lo spazio delle soluzioni è $W = \langle (1,2,1,0,0), (2,3,0,-1,1) \rangle$

In alternativa, per trovare una soluzione particolare del sistema non-omogeneo si può risolvere il sistema ponendo $x_3 = x_5 = 0$; e poi trovare le soluzioni del sistema omogeneo a parte. Otteniamo lo stesso risultato.

③ $\begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_4 = b \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$, $b \in \mathbb{R}$. Lavoriamo sulla matrice completa.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & -1 & 0 & -3 & b \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1 \\ R_4 \to R_4 - 2R_1}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & -7 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & -12 & b-3 \\ 0 & 3 & 5 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 + R_2 \\ R_4 \to R_4 - 3R_2}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{7} & -19 & b+3 \\ 0 & 0 & -7 & 19 & -18 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 + R_3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & -19 & b+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-15 \end{array}\right).$$

Il sistema è compatibile $\iff rg(A) = rg(A|b)$
$\iff$ l'ultima riga è nulla anche nella mat. completa
$\iff b = 15$. ✓.

Risolviamo il sistema per $b = 15$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{7} & -19 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 6 \\ 7x_3 - 19x_4 = 18 \end{cases}.$$

Risolviamo e otteniamo: (in x_4)

x_4 PAR. LIBERO!

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 19 - \frac{2}{7}x_4 \\ x_2 = -66 - \frac{27}{7}x_4 \\ x_3 = 18 + \frac{19}{7}x_4 \end{cases}.$$

Quindi le soluzioni del sistema non-omogeneo sono del tipo

$$\underbrace{(19, -66, 18, 0)}_{\text{SOL. PARTICOLARE NON-OMOGENEO}} + x_4 \underbrace{\left(-\frac{2}{7}, -\frac{27}{7}, \frac{19}{7}, 1\right)}_{\text{GENERATORE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DEL SISTEMA OMOGENEO.}}, \quad x_4 \in \mathbb{R}.$$

④ $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a+2 \\ 2a+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. $\left(\text{Sistema associato} \begin{cases} x_1 - x_2 + (a+2)x_3 = 0 \\ (2a+1)x_1 - x_2 = 0 \\ a x_3 = 0 \end{cases}\right)$.

Prima di applicare l'algoritmo di Gauss, notiamo che se $a=0$ M ha una riga nulla: trattiamo quindi prima di tutto questo caso particolare.

$\boxed{a=0}$ $\to M = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - R_1]{} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Le soluzioni sono del tipo $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_2, x_2, 0) = x_2 \underbrace{(1,1,0)}_{\text{GENERATORE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI.}}$, $x_2 \in \mathbb{R}$

$\boxed{a \neq 0}$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & a+2 \\ 2a+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - (2a+1)R_1]{} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & a+2 \\ 0 & \boxed{2a} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{a} \end{pmatrix}.$$

Abbiamo quindi che se $a \neq 0$, M ha rango $= 3$.

Ergo, per $a \neq 0$, lo spazio delle soluzioni (per il Thm di Rouché-Capelli) ha dimensione $3-3=0$, e quindi è il solo $\{\underline{0}\}$. ✓✓.