FOGLIO 3

① Una matrice quadrata $A=(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in M(n\times n,\mathbb{R})$ è detta simmetrica se $a_{ij}=a_{ji}$ per ogni coppia di indici. Invece A è detta antisimmetrica se $a_{ij}=-a_{ji}$ per ogni coppia di indici.

(i) Dimostrare che le matrici simmetriche formano un sottospazio vettoriale, denotato $Sym(n\times n,\mathbb{R})$, di $M(n\times n,\mathbb{R})$. Trovare una base e la dimensione di questo sottospazio.

• SOTTOSPAZIO?

$$A,B\in Sym(n\times n,\mathbb{R}),\ \lambda,\mu\in\mathbb{R} \Rightarrow \lambda A+\mu B\in Sym(n\times n,\mathbb{R})?$$

$$\lambda A+\mu B=(\lambda a_{ij}+\mu b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$$

$$\forall i,j=1,\dots,n \quad a_{ij}=a_{ji}\ ;\ b_{ij}=b_{ji} \Rightarrow \lambda a_{ij}+\mu b_{ij}=\lambda a_{ji}+\mu b_{ji}\ \forall i,j$$

$$\Rightarrow (\lambda A+\mu B)_{ij}=(\lambda A+\mu B)_{ji}\quad \forall i,j=1,\dots,n \Rightarrow \lambda A+\mu B\in Sym(n\times n,\mathbb{R})\ \checkmark$$

• BASE?

Mostriamo esplicitamente il caso 3×3, il caso generale è analogo.

Una matrice simmetrica 3×3 è della forma $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}$

Ergo,
$$A=a_{11}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+a_{12}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+a_{13}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}+a_{22}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+$$
$$+a_{23}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}+a_{33}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Le matrici che appaiono in questa decomposizione sono la base di $Sym(3\times 3,\mathbb{R})$.

In generale, la base di $Sym(n\times n,\mathbb{R})$ sarà data da

$\{V_{ij}\}_{\substack{i\le j\\ i,j=1,\dots,n}}$, con V_{ij} la matrice che ha 1 ai posti i,j e j,i; e 0 in tutti gli altri posti. (per esempio $V_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ per le 3×3).

• DIMENSIONE?

Per quanto riguarda la dimensione, ragioniamo per induzione.

Una matrice simmetrica A $n \times n$ ha la seguente forma:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\text{MATRICE} \\ \text{SIMMETRICA} \\ (n-1)\times(n-1)\end{matrix} & \begin{matrix} a_{1,n} \\ | \\ a_{n-1,n}\end{matrix} \\ \hline a_{1,n} — a_{n-1,n} & a_{n,n} \end{array}\right)$$; per cui notiamo che a partire

dalla base di $Sym((n-1)\times(n-1), \mathbb{R})$ dobbiamo solo aggiungere le

n matrici $\left(\begin{array}{c|c} O & \begin{matrix}1\\0\\|\\0\end{matrix} \\ \hline 1\,0 — 0 & 0\end{array}\right)$, —, $\left(\begin{array}{c|c} O & \begin{matrix}0\\|\\0\\1\end{matrix} \\ \hline 0 — 0\,1 & 0\end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{c|c} O & \begin{matrix}0\\|\\0\end{matrix} \\ \hline 0 — 0 & 1\end{array}\right)$ per trovare

una base di $Sym(n \times n, \mathbb{R})$.

$\forall n > 1 \quad \dim(Sym(n\times n, \mathbb{R})) = \dim(Sym((n-1)\times(n-1), \mathbb{R})) + n$. ⊛

Inoltre, è immediato che $Sym(1\times 1, \mathbb{R}) = M(1\times 1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$,

e dunque $\dim(Sym(1\times 1, \mathbb{R})) = 1$.

Di conseguenza, da ⊛, riscrivendo opportunamente $\dim(Sym((n-1)\times(n-1), \mathbb{R}))$,

otteniamo $\dim(Sym(n\times n, \mathbb{R})) = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$.

PER VEDERE $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$, RAGIONIAMO PER INDUZIONE:

• $n = 1$ → $\sum_{j=1}^{1} j = 1$; $\frac{1\cdot(1+1)}{2} = \frac{1\cdot 2}{2} = 1$ ✓.

$n-1 \to n$ $\quad \sum_{j=1}^{n} j = \sum_{j=1}^{n-1} j + n = \frac{(n-1)\cdot(n-1+1)}{2} + \frac{2n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ ✓✓.

(ii) Stessa domanda per l'insieme delle matrici antisimmetriche $Alt(n\times n, \mathbb{R})$

• SOTTOSPAZIO?

$A, B \in Alt(n\times n, \mathbb{R}) \Rightarrow \forall i,j=1,\dots,n \quad a_{ij} = -a_{ji}, \quad b_{ij} = -b_{ji}.$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow (\lambda A + \mu B)_{i,j} = \lambda a_{ij} + \mu b_{ij} = -(\lambda a_{ji} + \mu b_{ji}) = -(\lambda A + \mu B)_{ij}$

$\Rightarrow$ Ergo, $\forall A, B \in Alt(n\times n, \mathbb{R}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \lambda A + \mu B \in Alt(n\times n, \mathbb{R})$. ✓

• BASE?

L'idea é la stessa delle matrici simmetriche, ma bisogna stare attenti ad una cosa: $a_{ii} = -a_{ii}$, e quindi $\forall i \quad a_{ii} = 0$.

La forma quindi di una matrice antisimmetrica (3×3, nell'esempio) sará questa:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Una base sará dunque data da $\{\tilde{V}_{ij}\}_{\substack{i<j \\ j=1,\dots,n}}$, con $\tilde{V}_{ij}$ la matrice con $+1$ al posto i,j; -1 al posto j,i, e 0 in tutti gli altri posti. (Ex $V_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$).

• DIMENSIONE?

Anche qua ragioniamo in modo analogo alle simmetriche: una matrice antisimmetrica $n\times n$ ha forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\text{MATRICE} \\ \text{ANTISIMMETRICA} \\ (n-1)\times(n-1)\end{matrix} & \begin{matrix} a_{1,n} \\ | \\ a_{n-1,n} \end{matrix} \\ \hline -a_{1,n} - \cdots - a_{n-1,n} & 0 \end{array}\right).$$

In questo modo, otteniamo che $\dim(Alt(n\times n, \mathbb{R})) = \dim(Alt(n-1\times n-1, \mathbb{R})) + (n-1)$;

e osservando che $Alt(1\times 1, \mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x = -x\} = \{0\}$, otteniamo

$$\dim(Alt(n\times n, \mathbb{R})) = \sum_{j=0}^{n-1} j = \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}.$$

STESSO PROCESSO DELLA DIMENSIONE DELLE SIMMETRICHE!

(iii) Dimostrare che $M(n\times n, \mathbb{R}) = Sym(n\times n, \mathbb{R}) \oplus Alt(n\times n, \mathbb{R})$. (SOMMA DIRETTA!)

• $Sym(n\times n, \mathbb{R}) \cap Alt(n\times n, \mathbb{R}) = \{0\}$?

$A \in Sym(n\times n, \mathbb{R}) \cap Alt(n\times n, \mathbb{R})$, $\quad A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.

$\forall\, i,j = 1,\dots,n \qquad a_{ij} \underset{A\in Sym}{=} a_{ji} \underset{A\in Alt}{=} -a_{ij} \Rightarrow \forall\, i,j \quad a_{ij} = 0 \Rightarrow A = 0$ √/.

• $M(n\times n, \mathbb{R}) = Sym(n\times n, \mathbb{R}) \oplus Alt(n\times n, \mathbb{R})$?

Visto che Sym e Alt sono in somma diretta, sappiamo che

$\dim(Sym(n\times n, \mathbb{R}) \oplus Alt(n\times n, \mathbb{R})) = \dim(Sym(n\times n, \mathbb{R})) + \dim(Alt(n\times n, \mathbb{R})) =$

$= \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right) + \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right) = \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2} = n^2$;

Dato che $\dim(M(n\times n, \mathbb{R})) = n^2$, e $Sym(n\times n, \mathbb{R}) \oplus Alt(n\times n, \mathbb{R})$ é un sottospazio di $M(n\times n, \mathbb{R})$, questo basta per concludere. √//

② Dire, motivando la risposta, se in $\mathbb{R}^3$ il vettore w é c. l. di v_1, v_2, v_3.

(i) $w = (6,2,1)$, $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (7,3,1)$, $v_3 = (2,5,8)$.

w é c.l. di $v_1, v_2, v_3 \iff$ il sistema $\begin{cases} a + 7b + 2c = 6 \\ 3b + 5c = 2 \\ a + b + 8c = 1 \end{cases}$ é compatibile $\iff$

$\iff rk\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} = rk\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$. (dove $rk(A)$ é il rango di A.)

$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[(R_3 - R_1)]{III} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[(R_3 + 2R_2)]{III} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 7 & 2 \\ 0 & \boxed{3} & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{16} \end{pmatrix} \Rightarrow rk\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} = 3.$

$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(R_3 - R_1)]{III} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -6 & 6 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[(R_3 + 2R_2)]{III} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 7 & 2 & 6 \\ 0 & \boxed{3} & 5 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{16} & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow rk\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} = 3$ √/.

Quindi w é c. l. di v_1, v_2, v_3.

(ii) $w=(2,1,1)$, $v_1=(1,5,1)$, $v_2=(0,9,1)$, $v_3=(3,-1,1)$

Analogamente, basta controllare se $rk\begin{pmatrix}1&0&3\\5&9&-1\\1&1&1\end{pmatrix} = rk\begin{pmatrix}1&0&3&2\\5&9&-1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}1&0&3\\5&9&-1\\1&1&1\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(R_2-5R_1)\\(R_3-R_1)}]{III} \begin{pmatrix}1&0&3\\0&9&-16\\0&1&-2\end{pmatrix} \xrightarrow[(R_3\leftrightarrow R_2)]{IV} \begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&-2\\0&9&-16\end{pmatrix} \xrightarrow[(R_3-9R_2)]{III} \begin{pmatrix}\boxed{1}&0&3\\0&\boxed{1}&-2\\0&0&\boxed{2}\end{pmatrix} \Rightarrow rK=3.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&3&2\\5&9&-1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix} \xrightarrow{III} \begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&9&-16&-9\\0&1&-2&-1\end{pmatrix} \xrightarrow{IV} \begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&-2&-1\\0&9&-16&-9\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&\boxed{1}&-2&-1\\0&0&\boxed{2}&0\end{pmatrix} \rightarrow rK=3 \checkmark\checkmark$$

(3) Dire se i vettori v_1, v_2, v_3 formano una base di $\mathbb{R}^3$. In caso negativo, trovare la dimensione e una base del sottospazio da essi generato.

(i) $v_1=(1,1,1)$, $v_2=(3,0,-1)$, $v_3=(-1,1,-1)$

v_1, v_2, v_3 sono una base $\Leftrightarrow$ $\dim(\langle v_1,v_2,v_3\rangle)=3 \Leftrightarrow rK\left(\begin{pmatrix}1&1&1\\3&0&-1\\-1&1&-1\end{pmatrix}\right)=3$.

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\3&0&-1\\-1&1&-1\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2-3R_1\\R_3+R_1}]{III} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&-3&-4\\0&2&0\end{pmatrix} \xrightarrow[R_2\leftrightarrow R_3]{IV} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&0\\0&-3&-4\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3+\frac{3}{2}R_2]{III} \begin{pmatrix}\boxed{1}&1&1\\0&\boxed{2}&0\\0&0&\boxed{-4}\end{pmatrix} \Rightarrow rK=3 \checkmark\checkmark\checkmark$$

(ii) $v_1=(1,2,3)$, $v_2=(3,0,-1)$, $v_3=(-1,18,13)$

Di nuovo, calcoliamo il rango di $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&0&-1\\-1&18&13\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&0&-1\\-1&18&13\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2-3R_1\\R_3+R_1}]{III} \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-6&-10\\0&20&16\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3+\frac{20}{6}R_2]{III} \begin{pmatrix}\boxed{1}&2&3\\0&\boxed{-6}&-10\\0&0&\boxed{16-\frac{200}{6}}\end{pmatrix} \Rightarrow rK=3 \Rightarrow v_1,v_2,v_3 \text{ base} \checkmark$$

(iii) $v_1=(1,2,-3)$, $v_2=(1,0,-1)$, $v_3=(1,10,-11)$

$$\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&0&-1\\1&10&-11\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2-R_1\\R_3-R_1}]{III} \begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-2&2\\0&8&-8\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3+4R_2]{III} \begin{pmatrix}\boxed{1}&2&-3\\0&\boxed{-2}&2\\0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow rK=2 \Rightarrow v_1,v_2,v_3 \times$$

NON SONO UNA BASE

• DIMENSIONE E BASE DEL SOTTOSPAZIO?

Il sottospazio $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ di $\mathbb{R}^3$ è lo spazio delle righe di $\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&0&-1\\1&10&-11\end{pmatrix}$.

Sappiamo che a seguito di operazioni di riga questo spazio non cambia; quindi è generato anche da $(1,2,-3)$, $(0,-2,2)$ (LE RIGHE NON NULLE RIMASTE ALLO SCORSO PUNTO!).

Essendo questi l.i., formano una base, e la dimensione è 2. ✓✓✓

④ Siano U, W i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$: $U = \langle (1,0,1,0), (1,2,3,4) \rangle$;

$V = \langle (0,1,1,1), (0,0,0,1) \rangle$. Dire se U e V sono in somma diretta.

U è in somma diretta con $V \iff U \cap V = \{0\} \iff$

$\iff \dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = 2+2-0 = 4.$

$\dim U+V = 4$?

$U+V = \langle (0,1,1,1), (0,0,0,1), (1,0,1,0), (1,2,3,4) \rangle.$

Quindi $U+V$ è lo spazio delle righe di $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. $rK(A) = 4$?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_1 \leftrightarrow R_3 \\ R_2 \leftrightarrow R_4}]{IV} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 - R_1]{III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - \frac{1}{2}R_2]{III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 + R_3]{III} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vediamo che il rango è 3 e non 4, quindi $\dim U+V = 3$.

Possiamo concludere che $U \cap V \neq \{0\}$, ed in particolare $\dim U \cap V = 1$.