FOGLIO 5

① $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&3&-4\end{pmatrix}\in M_{2,3}(\mathbb{Q})$. Calcolare L_A e determinare una base per $\operatorname{Ker} L_A$ e $\operatorname{Im} L_A$.

② $B=\begin{pmatrix}3&-2\\1&3\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Q})$. Calcolare $L_B\circ L_A$, determinare rango e nullità di $L_B\circ L_A$, dire se B è invertibile.

③ Calcolare $M\cdot T$, $T\cdot M$, con $M=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$ $T=\begin{pmatrix}1&1\\2&-5\\4&1\end{pmatrix}$. MT, TM invertibili?

④ $F:\mathbb{R}[X]_3\to\mathbb{R}[X]_3$, $F(p)=p(x-1)$. F iso? Matrice di F? Determinare F^{-1}.

① $L_A(x,y,z)=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&3&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(x+2y-z,\ 3y-4z)$.

- $\operatorname{Ker} L_A=\{(x,y,z)\in\mathbb{Q}^3 \mid L_A(x,y,z)=0\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{Q}^3 \,\middle|\, \begin{cases}x+2y-z=0\\3y-4z=0\end{cases}\right\}$.

$\begin{cases}x+2y-z=0\\3y-4z=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=z-2y\\y=\frac{4}{3}z\end{cases} \iff \begin{cases}x=z-\frac{8}{3}z=-\frac{5}{3}z\\y=\frac{4}{3}z\end{cases} \Rightarrow \operatorname{Ker} L_A=\{(-\frac{5}{3}z,\frac{4}{3}z,z)\mid z\in\mathbb{Q}\}$
$= <(-\frac{5}{3},\frac{4}{3},1)>$.

- Per quanto riguarda $\operatorname{Im} L_A$, invece che estrarre una base esplicitamente da $<L_A((1,0,0)), L_A((0,1,0)), L_A((0,0,1))>$, notiamo che $\dim \operatorname{Im} L_A=\underbrace{3}_{\dim\mathbb{Q}^3}-\underbrace{1}_{\dim\operatorname{Ker} L_A}=2=\dim\mathbb{Q}^2$,
quindi $\operatorname{Im} L_A=\mathbb{Q}^2$ (e una base è $\{(1,0),(0,1)\}$.) ///

② $L_B\circ L_A(x,y,z)=L_{BA}(x,y,z)=\begin{pmatrix}3&-2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&3&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&5\\1&11&-13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+5z\\x+11y-13z\end{pmatrix}$

- $\operatorname{Ker} L_{AB}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{Q}^3 \,\middle|\, \begin{cases}3x+5z=0\\x+11y-13z=0\end{cases}\right\}\underset{\text{RISOLVIAMO IL SISTEMA}}{=}\{(-\frac{5}{3}z,4z,z)\in\mathbb{Q}^3 \mid z\in\mathbb{Q}\}=<(-\frac{5}{3},4,1)>$.

Dunque $\operatorname{null} L_{AB}=1$, e $\operatorname{rg} L_{AB}=3-1=2$.

- B è invertibile $\iff L_B:\mathbb{Q}^2\to\mathbb{Q}^2$ è invertibile $\iff L_B$ è suriettiva $\iff$
$\iff <L_B((1,0)), L_B((0,1))>=\mathbb{Q}^2 \iff$ le colonne di B sono vettori l.i.
Effettivamente, $(3,1)$ e $(-2,3)$ sono l.i. /// (si può calcolare $B^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}3&2\\-1&3\end{pmatrix}$.)

③ $MT = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ COLONNE l.i. $\Rightarrow$ invertibile ✓.

$TM = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 9 & -2 & -15 \\ 7 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. Controlliamo se sia invertibile:

$a(1,9,7) + b(-1,-2,-4) + c(3,-15,3) = (0,0,0) \iff$

$\iff \begin{cases} a - b + 3c = 0 \\ 9a - 2b - 15c = 0 \\ 7a - 4b + 3c = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a - b + 3c = 0 \\ 7b - 42c = 0 \\ 3b - 18c = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a - b + 3c = 0 \\ b - 6c = 0 \\ b - 6c = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = b - 3c = 3c \\ b = 6c \end{cases}$ $\Rightarrow$ per esempio, $a=3$, $b=6$, $c=1$ ci rende nulla la c.l.

$\Rightarrow$ I tre vettori non sono l.i. $\Rightarrow$ TM non invertibile ✓//.

④ Iniziamo trovandoci la matrice di F.

$F(1) = 1$, $F(x) = x-1$, $F(x^2) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$, $F(x^3) = (x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

$\Rightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le sue colonne sono chiaramente l.i., quindi abbiamo che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$ è invertibile. Questo ci dice che anche F lo è (ovvero è un isomorfismo). ✓//

Anche senza guardare la matrice, avremmo potuto dire immediatamente che F fosse invertibile: la sua inversa è chiaramente $\begin{cases} F^{-1}: \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3 \\ P(x) \longmapsto P(x+1) \end{cases}$.

In particolare, avremo che l'inversa di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$ è $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F^{-1})$:

• avendo una buona espressione per F^{-1}, la possiamo trovare facilmente.