$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell}$$

① $x_0 = +\infty$ $(-\infty)$ ℓ finito $\forall \varepsilon > 0$ $\varepsilon \in \mathbb{R}$ $\exists M_\varepsilon$

se $x > M_\varepsilon$ $(x < M_\varepsilon)$ $x \in \mathrm{Dom} f$ $\Rightarrow$ $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

② $x_0 = +\infty$ $(-\infty)$ $\ell = +\infty$ $(-\infty)$

$\forall K > 0$ $\exists M_K$: se $x > M_K$ $(<)$ $x \in \mathrm{Dom} f$ $f(x) > K$ $(<)$

③ $x_0 \in \mathbb{R}$ $\qquad \ell \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0$ tale che $x \in \mathrm{Dom}\, f$

$|x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$

$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \qquad \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

④ $\ell \in \mathbb{R}$ $\qquad \ell = +\infty$ $(-\infty)$

$\forall M > 0$ (<0) $\quad \exists \delta_M :$ se $x \in \mathrm{Dom}\, f$

$|x - x_0| < \delta_M \implies f(x) > M$ (<0)

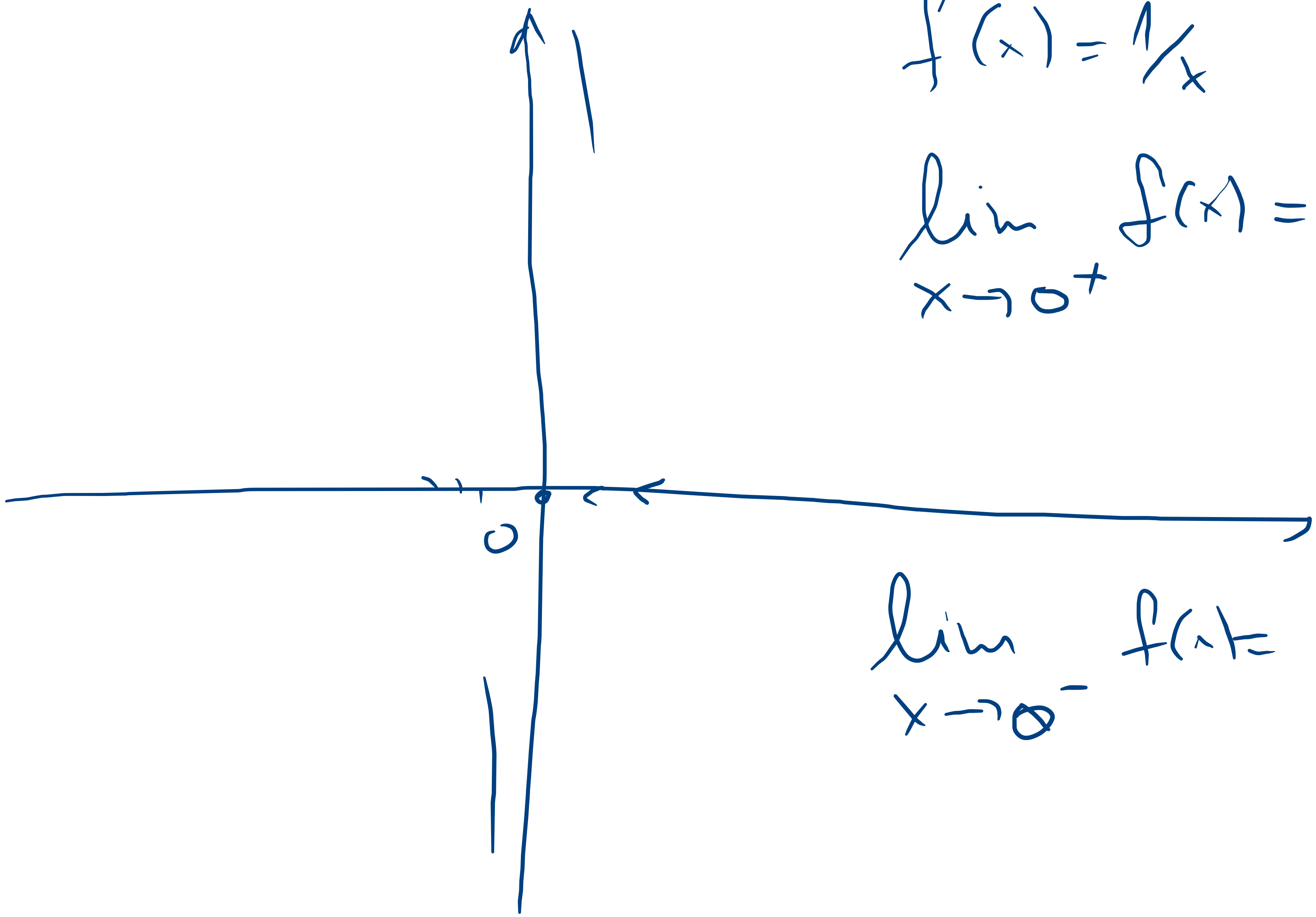
Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e $l = +\infty$ $(-\infty)$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = l}$$

allora diremo che la retta di equazione $x = x_0$ è un asintoto verticale per f.

<u>Def</u> Si dice limite destro (sinistro) di f e lo si indica

con $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ (x_0^-) se $f(x)$ appartiene ad un intorno di l quando $x \in \mathrm{Dom} f$ e $x \in I_{x_0}$, $x \underset{(<)}{>} x_0$.



$$f(x) = 1/x$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

ho due asintoti verticali rispettivamente di equazioni

$x=1$ $x=2$.

Def

Se $\lim_{x \to +\infty \, (-\infty)} f(x) = l \in \mathbb{R}$

allora la retta di equazione $y = l$ è detta asintoto orizzontale (destro) (sinistro)

Non è detto che (se esistono) un asintoto orizzontale destro coincida col sinistro.

<u>Es</u> $f(x) = e^x$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

$\uparrow$ $y=0$ asintoto orizzontale sinistro, ma non esiste asintoto orizzontale destro

Es

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \qquad \mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$ $y = 1$ asintoto orizzontale destro

$\neq$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$$ $y = -1$ asintoto orizzontale sinistro.

Tuttavia SE ESISTONO asintoti orizzontali sono unici per il Teorema di Unicità del Limite

Per i limiti di funzioni continuano a valere gli analoghi risultati visti per le successioni quali:

Teorema unicità del limite

Teorema della permanenza del segno

Teorema del confronto (Carabinieri)

Condizione di monotonia per esistenza limiti oltre alla compatibilità di limiti e operazioni

Supponiamo $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$ $\quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$

$(x_0, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$

allora

1) $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \ell_1 + \ell_2$ SALVO IL CASO $\ell_1 = +\infty \quad \ell_2 = -\infty$

$\ell_1 = -\infty \quad \ell_2 = +\infty$

2) $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \ell_1 \cdot \ell_2$ ECCETTO il caso $\boxed{\ell_1 = 0 \quad \ell_2 = \pm\infty}$ $\quad \boxed{\ell_1 = \pm\infty \quad \ell_2 = 0}$

e con le convenzioni

se $\ell_1 = +\infty \quad \ell_2 = +\infty$

$\ell_1 + \ell_2 = +\infty \quad \ell_1 \cdot \ell_2 = +\infty$

$\ell_1 = -\infty \quad \ell_2 = -\infty$

$\ell_1 + \ell_2 = -\infty \quad \ell_1 \cdot \ell_2 = +\infty$

$\ell_1 = -\infty \ (+\infty) \quad \ell_2 = +\infty \ (-\infty) \qquad \ell_1 \cdot \ell_2 = -\infty$

3) $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$$

CON L'ECCEZIONE $l_1 = 0$ $l_2 = 0$

$$\boxed{l_1 = \pm\infty \quad l_2 = \pm\infty}$$

e con la convenzione che se $l_1 \in \mathbb{R}$

$$l_2 = \pm\infty \qquad \boxed{l_1/l_2 = 0}$$

Osserviamo che se $l_1 = \pm\infty$ $l_2 = 0$ oppure $l \in \mathbb{R}$ e $l_2 = 0$

$\Rightarrow$ $l_1/l_2 = \pm\infty$ (il segno dipende dal segno del rapporto f/g)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$-\frac{1}{x} \to 0 \qquad \frac{1}{x} \to 0$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$$

dal calcolo svolto per le successioni

$$\frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} \to 1$$

se $a_n \to 0$

$$\boxed{n \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{n} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}}{(1 + \cos x)} = \frac{1}{2}$$

$$1 - \cos^2 x = (1 - \cos x) \cdot \boxed{(1 + \cos x)} = \operatorname{sen}^2 x$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

$$\boxed{1+x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}}$$

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

$$x \leq e^x - 1 \leq \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{\cancel{1} - \cancel{1} + x}{1-x} = \frac{x}{1-x}$$

$$x \le e^x - 1 \le \frac{x}{1-x}$$

se $x>0$

$$\underset{\downarrow}{1} \le \frac{e^x-1}{x} \le \frac{1}{1-x} \xrightarrow{x\to 0} 1$$

$$1$$

se $\boxed{x<0}$

$$\underset{\downarrow}{1} \ge \frac{e^x-1}{x} \ge \frac{1}{1-x} \xrightarrow{x\to 0} 1$$

$$1$$

Per il confronto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

$$\nexists \begin{cases} \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \end{cases}$$

$$e^{1/x} = f(x)$$

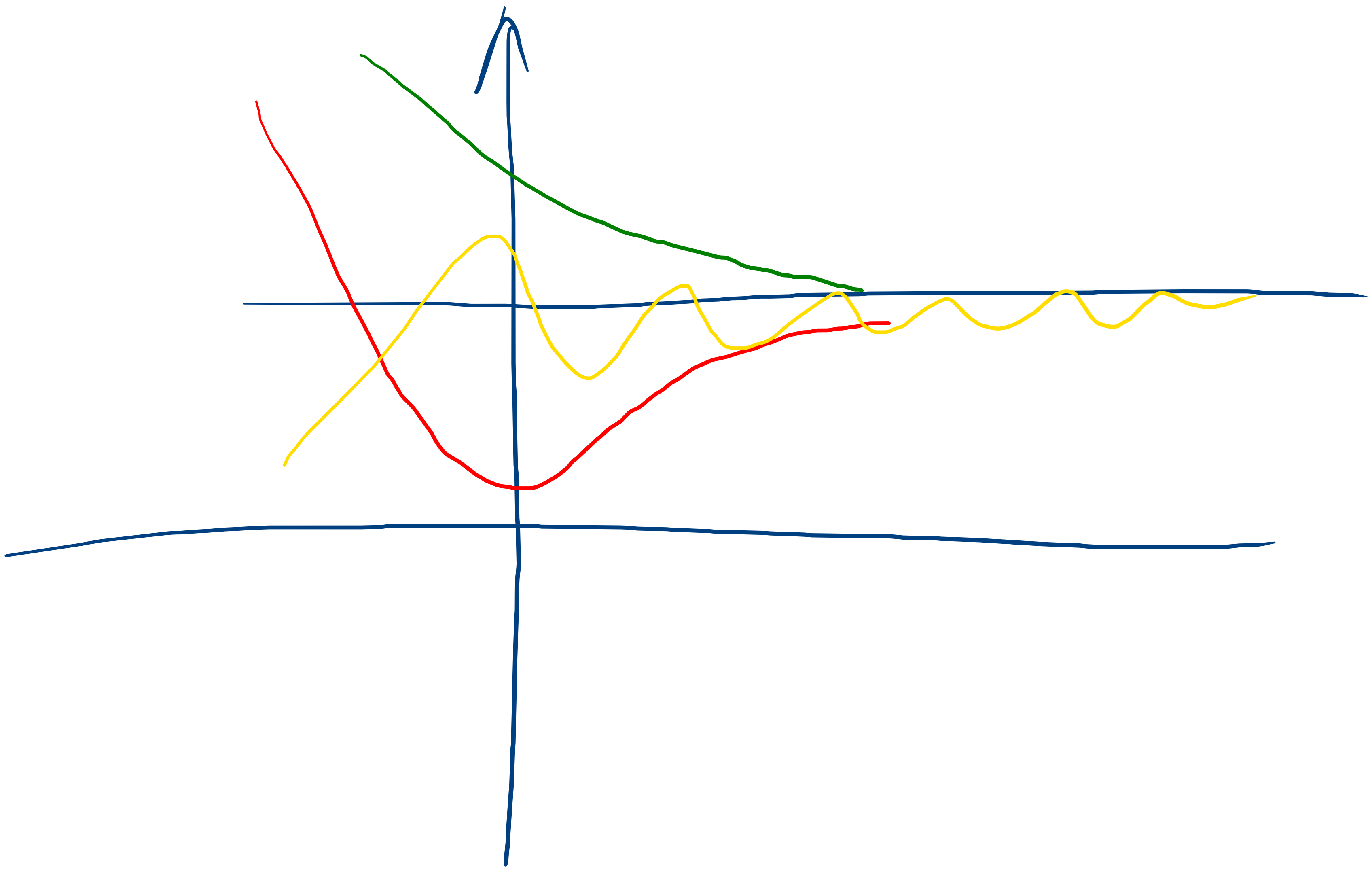
$$\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0$$



Se $\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (-\infty)}} f(x) = +\infty \ (-\infty)$

e $\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) \underline{- mx - q} \right) = 0$

allora la retta di eq. $y = mx + q$

è detta asintoto obliquo destro (sinistro)

Per trovare m, si calcola

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \neq 0$$

Se $\left(f(x) - mx - q\right) \xrightarrow{x\to+\infty} 0$

$\Rightarrow \frac{f(x)}{x} - m - \frac{q}{x} \to 0$

Se tale limite è finito significa che

può esistere un asintoto obliquo (destro)

Per determinare q (e quindi ancora l'esistenza dell'asintoto obliquo) si calcola $\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx\right) = q$

Se tale limite q esiste ed è finito allora

$y = mx + q$ è l'eq. dell'asintoto obliquo destro

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

ha un asintoto obliquo destro?

E uno sinistro?

Quali altri asintoti ha f?