Es. 2 (dal libro di L. Picconi) pg. 212

Lo svolgimento a pag 215 è sbagliato, producendo un valore di p > 1 al punto a). Ci sono inoltre alcune imprecisioni (a pg. 214) che riguardano il parametro *p* della binomiale: trattandosi del lancio di un dado il valore è *p = 1/6* e non ½.

Vediamo assieme un possibile ragionamento

Una rappresentazione dell'urna: il primo valore della serie è "il numero estratto a caso dall'urna".

1)

4	3	17	7	13	12	1	20

Ecco un'altra urna, però stavolta verrà estratto il numero "6".

2)

6	4	12	19	7	2	13	3

Ogni urna è costituita da otto numeri scelti tra una serie di 20 numeri possibili: 1, 2, 3, 4, 5,…, fino al 20.

La **probabilità della prima** urna è:

$$P(4 \cap 3 \cap 17 \cap 7 \cap 13 \cap 12 \cap 1 \cap 20) =$$
$$= {}^{1}/_{20} \times {}^{1}/_{19} \times {}^{1}/_{18} \times {}^{1}/_{17} \times {}^{1}/_{16} \times {}^{1}/_{15} \times {}^{1}/_{14} \times {}^{1}/_{13}$$
$$= .0000000001968849$$

La **probabilità della seconda** urna è,

$$P(6 \cap 4 \cap 12 \cap 19 \cap 7 \cap 2 \cap 13 \cap 3) =$$
$$= {}^{1}/_{20} \times {}^{1}/_{19} \times {}^{1}/_{18} \times {}^{1}/_{17} \times {}^{1}/_{16} \times {}^{1}/_{15} \times {}^{1}/_{14} \times {}^{1}/_{13}$$
$$= .0000000001968849,$$

e lo stesso vale per ogni possibile urna di otto numeri scelti a caso dalla serie iniziale di venti numeri.

La **probabilità di estrarre "un quattro"** dall'urna è un evento composto soddisfatto da tutte le urne che iniziano con il numero quattro (ricordate, abbiamo detto all'inizio che il primo valore della serie è "il numero estratto a caso dall'urna").

Ad esempio, ecco tre possibili serie che iniziano con "4":

4	3	17	7	13	12	1	20
4	2	1	6	15	12	1	19
4	1	7	12	3	16	14	2

Fisso Cambiano

Quante sono in tutto le serie ordinate di (k=) 8 numeri (*ottuple*) che iniziano per "4", estratte da un totale di (n=) 20 numeri?

In pratica, tutti i modi di ordinare 7 (k-1) numeri (…il "quattro" iniziale è fisso), presi da un totale di 19 (n-1) possibili alternative (il "quattro" è naturalmente escluso).

$$1 \times \frac{19!}{(19-7)!} = 253{,}955{,}520.$$

Lo stesso vale per ogni possibile numero iniziale.

La **probabilità dell'evento unione di tutte le possibili *ottuple* che iniziano per quattro**, tra loro disgiunte, segue la regola della somma della probabilità: Essendo ogni possibile *ottupla* equiprobabile, basterà moltiplicarne la probabilità per il numero complessivo nello spazio campione (potenza).

Probabilità di estrarre "4":

$$P(4) = .0000000001968849 \times 253{,}955{,}520 = .050000 = {}^{1}/_{20};$$

Probabilità di estrarre "3":

$$P(3) = .0000000001968849 \times 253{,}955{,}520 = .050000 = {}^{1}/_{20};$$

Probabilità di estrarre "2":

$$P(2) = .0000000001968849 \times 253{,}955{,}520 = .050000 = {}^{1}/_{20};$$

Probabilità di estrarre "1":

$$P(1) = .0000000001968849 \times 253{,}955{,}520 = .050000 = {}^{1}/_{20}.$$

La probabilità di estrarre un numero dall'urna è uguale alla probabilità di inserirlo nell'urna stessa, a partire dai 20 possibili numeri inziali: 1/20 = .05.

a) La probabilità di estrarre un numero inferiore a 5,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} < 5) = \mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(2) + \mathrm{P}(3) + \mathrm{P}(4) = \frac{1}{20} \times 4 = .20.$$

b) La probabilità di estrarre un numero > 6 è

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} > 6) = 1 - [\mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(2) + \mathrm{P}(3) + \mathrm{P}(4) + \mathrm{P}(5)] = 1 - \left(\frac{1}{20} \times 5\right) = .75.$$

Proviamo con il **metodo del punto campione**, riducendo però la serie tra cui scegliere ad n = 5 (1,2,3,4,5) e rendendo l'urna di 3 bigliettini, con numeri possibili dall'uno al cinque.

Elenchiamo tutte le terne (…le nostre urne) di numeri dall'uno al cinque*:*

$${}_{3}D_{5} = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ terne},$$

Omega = {

[1 2 3], [1 2 4], [1 2 5], [1 3 2], [1 3 4], [1 3 5], [1 4 2], [1 4 3], [1 4 5], [1 5 2], [1 5 3], [1 5 4],

[2 1 3], [2 1 4], [2 1 5], [2 3 1], [2 3 4], [2 3 5], [2 4 1], [2 4 3], [2 4 5], [2 5 1], [2 5 3], [2 5 4],

[3 1 2], [3 1 4], [3 1 5], [3 2 1], [3 2 4], [3 2 5], [3 4 1], [3 4 2], [3 4 5], [3 5 1], [3 5 2], [3 5 4],

[4 1 2], [4 1 3], [4 1 5], [4 2 1], [4 2 3], [4 2 5], [4 3 1], [4 3 2], [4 3 5], [4 5 1], [4 5 2], [4 5 3],

[5 1 2], [5 1 3], [5 1 4], [5 2 1], [5 2 3], [5 2 4], [5 3 1], [5 3 2], [5 3 4], [5 4 1], [5 4 2], [5 4 3] *}*

Contiamo quante terne "iniziano" con "1" (12); contiamo quante terne "iniziano con "2" (12) e così per "3", "4" e "5"(sempre 12).

Quante terne ci sono in tutto? 60.

Abbiamo che

$$\mathrm{P}(1) = \frac{12}{60} = .20 = \frac{1}{5}$$
$$\mathrm{P}(2) = \frac{12}{60} = .20 = \frac{1}{5}$$
$$\mathrm{P}(3) = \frac{12}{60} = .20 = \frac{1}{5}$$
$$\mathrm{P}(4) = \frac{12}{60} = .20 = \frac{1}{5}$$
$$\mathrm{P}(5) = \frac{12}{60} = .20 = \frac{1}{5}.$$

La probabilità di estrarre un numero dall'urna è uguale alla probabilità di inserirlo nell'urna stessa, a partire dai 5 possibili numeri inziali: .20 = 1/5.

Nota bene. Nell'esempio originale (n = 20, k = 8) il metodo del punto campione non è perseguibile a causa dell'elevata potenza dell'insieme Omega:

$${}_{8}\mathrm{D}_{20} = \frac{20!}{(20-8)!} = 5079110400.$$

Possiamo però verificare come il calcolo di serie di otto numeri che iniziano con un valore specifico, 253955520, sono 1/20 del totale di Omega:

$$\mathrm{P}(4) = \frac{253955520}{5079110400} = .05 = {}^{1}/_{20}.$$