$A, A' \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ rappresentano la stessa applicazione lineare

$$f : V \longrightarrow W$$

rispetto a due basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ in V e $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ in W

$\iff \exists\ S \in GL_n(\mathbb{K})$ e $T \in GL_m(\mathbb{K})$ t.c.

$$\boxed{A' = TAS}$$

$$\Longrightarrow \quad rg(A') = \boxed{rg(A) = rg(TA) = rg(AS)}$$

Dimostrazione alternativa dell'uguaglianza $\quad A \in M_{m,n}(K)$

$$rg(A) = rg(TA) = rg(AS) \qquad T, S \text{ invertibili}$$

*

$$\boxed{L_A = F_A}$$

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "L_A"] \arrow[rr, bend right] & K^m \arrow[r, "L_T", "\cong"'] & K^m \end{tikzcd}$$

$$\boxed{L_T \circ L_A = L_{TA}}$$

$$rg(A) = rg(L_A) = \dim(\operatorname{im} L_A) = \dim(L_T(\operatorname{im} L_A)) =$$

$$= \dim(\operatorname{im}(L_T \circ L_A)) = rg(L_T \circ L_A)$$

$L_T \cong$

$$= rg(TA)$$

Prop $\boxed{rg(AB) \le \min(rg A, rg B)}$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,r}(\mathbb{K})$

Dim capire $rg(L_A \circ L_B) = rg(L_{AB})$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^r \arrow[r, "L_B"] \arrow[rr, bend right, "L_A \circ L_B"'] & \mathbb{K}^n \arrow[r, "L_A"] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc} rg(AB) & \le & rg\, B \\ \| & & \| \\ \dim(L_A(\mathrm{im}\, L_B)) & \le & \dim(\mathrm{im}\, L_B) \end{array}$$

$$\mathrm{im}(L_A \circ L_B) = L_A(\mathrm{im}\, L_B)$$

$$\begin{array}{ccccc} rg(AB) & = & \dim(L_A(\mathrm{im}\, L_B)) & \le & \dim L_A(\mathbb{K}^n) \\ & & & & \| \\ & & & & \boxed{rg\, A} \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right] & W \arrow[r, "g"] & U \end{tikzcd}$$

Spazi di dim $< \infty$

$\circledast$

$$rg(g \circ f) \leq \min(rg\, g, rg\, f)$$

$f : V \longrightarrow W \qquad \dim V = \dim W = n < \infty$

f iniettiva $\Longleftrightarrow$ suriettiva $\Longleftrightarrow$ isomorfismo

---

non vale se $\dim V = \dim W = \infty$

$g : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X] \qquad g(1) = 0, \; g(X) = 1, \; g(X^2) = X$

non iniettiva $1 \in \operatorname{Ker} g \qquad \ldots \; g(X^k) = X^{k-1} \quad \forall k \geq 1$

ma suriettiva

$h : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$

$h(p) = Xp$ lineare

$$\begin{cases} h(p_1+p_2) = X(p_1+p_2) = Xp_1 + Xp_2 = h(p_1)+h(p_2) \\ h(\lambda p) = X(\lambda p) = \lambda X p = \lambda h(p) \end{cases}$$

$1 \notin \operatorname{im} h$ $\qquad 1 = Xp$ impossibile

h non suriettiva

ma h iniettiva $\qquad h(p) = 0 \Rightarrow Xp = 0 \Rightarrow p = 0$

$\operatorname{Ker} h = \{0\}$

SISTEMI LINEARI

m equazioni di 1° grado in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$\mathbb{K} \ni b_i$ termini noti

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrice del sistema

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\boxed{AX = B}$$

forma matriciale

$A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^m$ vettore dei termini noti

$X \in \mathbb{K}^n$ vettore delle incognite

Def Una soluzione del sistema lineare $\underline{AX = B}$ è un
equazione
vettore $\bar{X} \in \mathbb{K}^n$ t.c. $\underline{A\bar{X} = B}$.
identità tra vettori

L'insieme delle soluzioni sarà denotato con

Σ oppure Σ_B

Def il sistema $AX = B$ è detto <u>sistema compatibile</u> se ammette almeno una soluzione, ovvero se $\Sigma \neq \emptyset$.

Se $\Sigma = \emptyset$ il sistema è detto incompatibile.

Es

1) $x = 1$ $\quad m = n = 1$ (esempio banale)

compatibile

2) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 = 2 \end{cases}$ $\quad m = 2, \ n = 1$ incompatibile

---

3) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 2x = 1 \\ 2y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 4x + 8y = 0 \end{cases} \longrightarrow x + 2y = 0 \quad \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

∞ soluzioni

Un sistema è detto omogeneo se è della forma

$$AX = 0$$

cioè se il vettore dei termini noti è nullo

<u>Prop</u>. Un sistema omogeneo è sempre compatibile. Inoltre l'insieme delle soluzioni di $AX = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.

<u>Dim</u> $X = 0$ è soluzione $\Rightarrow \Sigma \neq \emptyset$ (Σ insieme delle soluzioni di $AX=0$)

$S_1, S_2 \in \Sigma \Rightarrow A(S_1 + S_2) = AS_1 + AS_2 = 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow S_1 + S_2 \in \Sigma$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $S \in \Sigma \Rightarrow A(\lambda S) = \lambda AS = \lambda 0 = 0$

$\Rightarrow \lambda S \in \Sigma$.

(1° dimostrazione)

1ª dimostrazione

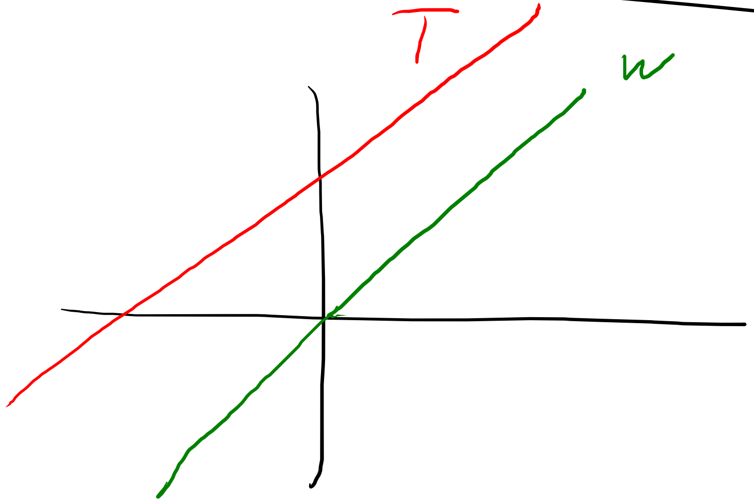
$$L_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$
$$X \longmapsto AX$$

$$\Sigma = \ker L_A \subset \mathbb{K}^n \quad \text{sottospazio vett.}$$

V spazio vett. su K, $W \subset V$ sottosp. vett.

$T \subset V$ è detto sottospazio affine di V se $\exists\ t \in V$ t.c.

$$T = t + W = \{ t + w \mid w \in W \}$$



W si chiama giacitura di T

Teorema di struttura

L'insieme Σ delle soluzioni di $AX = B$, se non vuoto, è un sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$, dove $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{m,1}(\mathbb{K})$. La sua giacitura è lo spazio Σ_0 delle soluzioni del sistema omogeneo associato $AX = 0$.

In altre parole, ogni soluzione S di $AX = B$ si scrive come $\boxed{S = \bar{X} + U}$, dove $\bar{X}$ è una soluzione particolare di $AX = B$, e U è una soluzione di $AX = 0$.

Dim Supponiamo $\Sigma \neq \emptyset$, Σ insieme delle soluzioni di $AX = B$

$\Rightarrow \exists\ \bar{X} \in \Sigma$

Sia $S \in \Sigma$ $\quad A(S - \bar{X}) = AS - A\bar{X} = B - B = 0$

$\Rightarrow S - \bar{X} \in \Sigma_0$, Σ_0 spazio delle soluz. di $AX = 0$

Poniamo $U = S - \bar{X} \Rightarrow S = \bar{X} + U$, $U \in \Sigma_0$

$\Rightarrow S \in \bar{X} + \Sigma_0 \subset \mathbb{K}^n$

Sia $S \in \bar{X} + \Sigma_0 \Rightarrow S = \bar{X} + U$, $U \in \Sigma_0$

$AS = A\bar{X} + AU = B + 0 = B \Rightarrow S \in \Sigma$

$\Rightarrow \boxed{\Sigma = \bar{X} + \Sigma_0} \subset \mathbb{K}^n$

Prop Consideriamo un sistema lineare $AX = B$. Le seguenti sono equivalenti: $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

1) $AX = B$ è compatibile;
2) $B \in \operatorname{im} L_A$, $L_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$
3) $B \in \operatorname{Span}(\underbrace{A_{(1)}, \dots, A_{(n)}}_{\text{colonne di } A}) \subset \mathbb{K}^m$ ($\Longleftrightarrow$ B è combinazione lin. delle colonne di A)
4) $\underline{\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A \mid B)}$

dove $(A \mid B)$ è la matrice ottenuta aggiungendo ad A la colonna B, $(A \mid B) \in M_{m,n+1}(\mathbb{K})$
matrice completa del sistema
(orlata)

Dim

(1) $\Rightarrow$ (2) ovvio

(2) $\Rightarrow$ (3) ovvio perché $\operatorname{im} L_A = \operatorname{span}(A_{(1)}, \ldots, A_{(n)})$

(3) $\Rightarrow$ (4) ovvio

(4) $\Rightarrow$ (1) $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|B) \Rightarrow B \in \operatorname{span}(A_{(1)}, \ldots, A_{(n)}) = \operatorname{im} L_A$

$\Rightarrow \exists\, \bar{X} \in \mathbb{K}^n$ t.c. $B = L_A(\bar{X}) = A\bar{X} \Rightarrow \bar{X}$ è sol.

$\Rightarrow AX = B$ compatibile

$\square$

Se $B \in \operatorname{span}(A_{(1)}, \ldots, A_{(n)}) \Rightarrow \underline{B = s_1 A_{(1)} + \cdots + s_n A_{(n)}}$, $s_i \in \mathbb{K}$

$S = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ soluzione infatti

$$AS = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} s_1} + \dots + a_{1n} s_n \\ a_{21} s_1 + \dots + a_{2n} s_n \\ \text{---} \\ a_{m1} s_1 + \dots + a_{mn} s_n \end{pmatrix} = \underline{A_{(1)} s_1 + \dots + A_{(n)} s_n = B}$$

$\Rightarrow S$ soluzione.