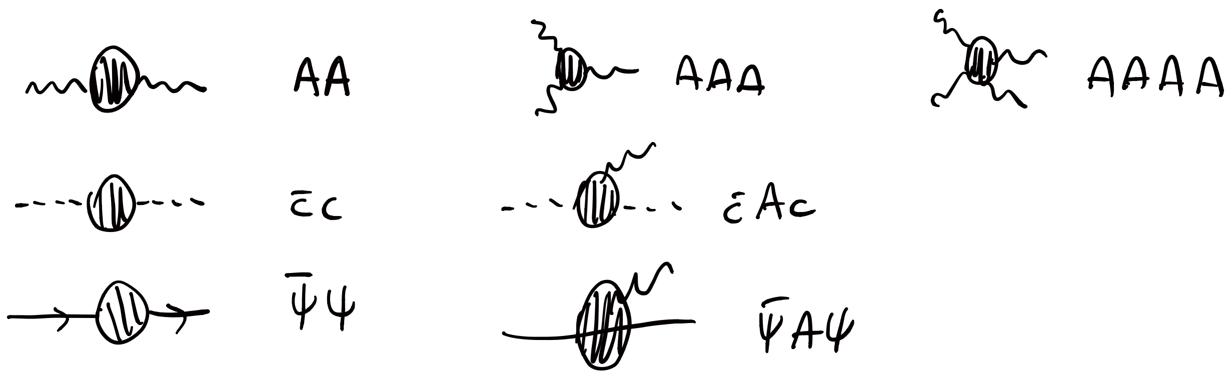
Per cancellare infiniti nelle 1PI, uno aggiunge dei controtermini :



$d = 2\omega$

con coeff. proporzionale a $\frac{1}{2-\omega}$

Purtroppo, aggiungere tali termini NON corrisponde a priori a una ridefinizione dei PARAMETRI nella Lagrangiana BARE.

→ i termini in $\mathcal{L}$ appaiono con coeff LEGATI TRA LORO dalla simmetria di BRST

$\mathcal{L}_B =$ termini cinetici quadratici $+ \; g\, A A \partial A + g^2 AAAA + g\, \bar{c} A c + g\, \bar{\psi} A \psi$

← Z's

Affinché la teoria sia rinormalizzabile, cioè è finita con una opportuna scelta dei parametri (come funz. di ω), bisogna che gli infiniti siano pure legati da relazioni dettate da BRST sym.

Se aggiungiamo i controtermini a $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = -\frac{Z_A}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + \frac{Z_V^{(0,3,0)}}{2} g_r f^{abc} A_\mu^a A_\nu^b (\partial^\mu A^{c\nu} - \partial^\nu A^{c\mu})$$

$$- \frac{Z_V^{(0,4,0)}}{4} g_r^2 f^{bce} f^{dea} A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu} A^{e\nu} + \frac{Z_\xi}{2\xi}(\partial_\mu A^{a\mu})^2 \qquad (*)$$

$$- Z_c \bar{c}^a \partial^2 c^a - Z_V^{(0,1,2)} g_r \bar{c}^a \partial^\mu f^{abc} A_\mu^b c^c + Z_\psi i \bar{\psi} \partial\!\!\!/ \psi - Z_m m_r \bar{\psi}\psi$$

$$- Z_V^{(2,1,0)} g_r \bar{\psi} \gamma^\mu t_R^a \psi A_\mu^a$$

(i campi sono i CAMPI RINORMALIZZATI $\varphi_B = \varphi_r Z_\varphi^{1/2}$)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\varphi_r, g_r, m_r) + \mathcal{L}_{c.t.}$$

Se uno usa un REGOLARIZZATORE BRST-INVAR. allora le <u>identità di Ward</u> valgono ancora ($\mathcal{L}^{reg}$ è ancora inv. sotto BRST)

↳ relazioni tra i correlatori che ci si può ricavare usando le trasf. di BRST nel P.I.

Applicando le id. di WARD-TAKAHASHI (SLAVNOV-TAYLOR) per la simmetria di BRST, ci si ricava

$$\frac{Z_V^{(0,4,0)}}{Z_V^{(0,3,0)}} = \frac{Z_V^{(0,3,0)}}{Z_A} = \frac{Z_V^{(0,1,2)}}{Z_c} = \frac{Z_V^{(2,1,0)}}{Z_\psi}$$

[Prendiamo trasf. BRST $(\delta\varphi = \epsilon Q_B \cdot \varphi)$

$$Q_B \cdot A_\mu^a = \partial_\mu c^a + a f^{abc} A_\mu^b c^c$$

$$Q_B \cdot c^a = -\frac{b}{2} f^{abc} c^b c^c \qquad Q_B^2 = 0 \Rightarrow b = a = r$$

$$Q_B \bar{c}^a = \gamma \partial^\mu A_\mu^a \qquad Q_B \psi = r i c \psi$$

Imponendo l'inv. sotto BRST della lagrangiana $\mathcal{L}$ (*)

$$a Z_A = g_r Z_V^{(0,3,0)} \qquad a Z_V^{(0,3,0)} = g_r Z_V^{(0,4,0)}$$

$$a Z_c = g_r Z_V^{(0,1,2)} \qquad a Z_\psi = g_r Z_V^{(2,1,0)}$$

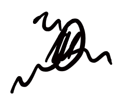
$$Z_V^{(2,1,0)} \mu^{2-\omega} g_r \bar\psi \gamma^\mu t^a_R \psi A^a_\mu = g_B \bar\psi_B \gamma^\mu t^a_R \psi_B A^a_{B\mu} = g_B Z_\psi Z_A^{1/2} \bar\psi \gamma^\mu t^a_R \psi A^a_\mu$$

$$\Rightarrow g_B = g_r \mu^{2-\omega} Z_V^{(2,1,0)} Z_\psi^{-1} Z_A^{-1/2} \quad (\star) \quad (d=2\omega)$$

Potremmo calcolarci g_B utilizzando un altro termine di interazione in $\mathcal{L}$, per esempio $g\, AA\partial A$:

$$Z_V^{(0,3,0)} \frac{g_r}{2} \mu^{2-\omega} AA\partial A = \frac{g_B}{2} A_B A_B \partial A_B$$

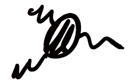
$$\to g_B = g_r \mu^{2-\omega} \frac{Z_V^{(0,3,0)}}{Z_A^{3/2}} = g_r \mu^{2-\omega} \underbrace{\frac{Z_V^{(0,3,0)}}{Z_A}}_{= Z_V^{(2,1,0)} Z_\psi^{-1}} Z_A^{-1/2}$$

Detto altrimenti, ci basta def. g_B come in $(\star)$ per cancellare gli infiniti anche in  (e , )

$$\frac{1}{2} g_B A_B^2 \partial A_B = \frac{1}{2} \mu^{2-\omega} g_r Z_V^{(2,1,0)} Z_\psi^{-1} Z_A^{-1/2} Z_A^{3/2} A^2 \partial A =$$

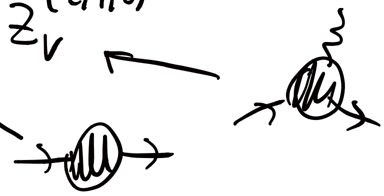
$$= \frac{1}{2} \mu^{2-\omega} g_r Z_A^{(0,3,0)} A^2 \partial A$$

Id. Slavnov-Taylor

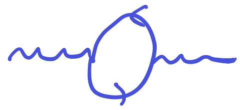
questa è la costante che avrei trovato richiedendo la cancellaz. di ∞ in .

β- function

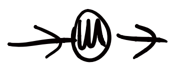
$$g_B = g_r\, \mu^{2-\omega}\, Z_A^{-1/2}\, Z_\psi^{-1}\, Z_V^{(2,1,0)}$$

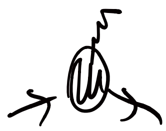


cost. necessaria per cancellare l'∞ in 

Per trovare la relaz. tra g_B e g_r dobbiamo calcolare 3 ampiezze 1PI (In QED, grazie a id. Ward, $Z_V^{(2,1,1)} = Z_\psi$ $\Rightarrow$ bastava calcolare , che a 1 loop è )

$Z_A \longleftrightarrow$  (4 diagr. a 1-loop)

$Z_\psi \longleftrightarrow$  (1 diagr. a 1-loop)

$Z_V^{(2,1,0)} \longleftrightarrow$  (2 diagr. a 1-loop)

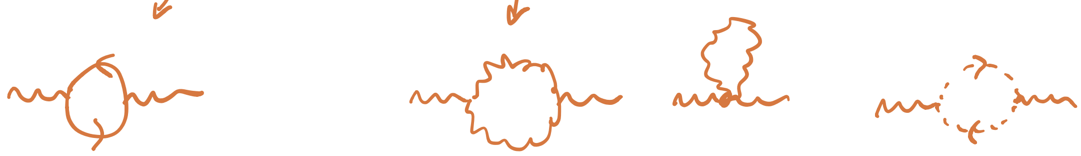
n° di FLAVOURS

Prendiamo una teoria con N_f fermioni di Dirac nella rapp. R di G ($i\bar{\Psi}^I \not{D} \psi^I = i\bar{\psi}^I(\not{\partial} + i A^a_\mu \gamma^\mu t^a_R)\psi^I$)

simmetria globale ("di flavour") è $SU(N_f)$

$Z = 1 + \delta Z$

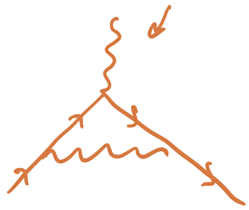
$$\delta Z_A = -\frac{g_r^2}{16\pi^2}\left(\frac{4}{3} N_f\, c(R) - \frac{5}{3} c_2(G)\right)\frac{1}{2-\omega}$$

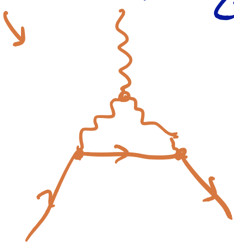


$$\delta Z_\psi = -\frac{g_r^2}{16\pi^2} C_2(R) \frac{1}{2-\omega} \rightarrow$$ 

questo termine fa sì che $\delta Z_V^{(2,1,0)} \neq \delta Z_\psi$ contrariamente alla QED

$$\delta Z_V^{(2,1,0)} = -\frac{g_r^2}{16\pi^2} \left(C_2(R) + C_2(G) \right) \frac{1}{2-\omega}$$





$$g_B = g_r \mu^{2-\omega} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\delta Z_A\right)}_{\cong Z_A^{-1/2}} \underbrace{\left(1 - \delta Z_\psi\right)}_{\cong Z_\psi^{-1}} \underbrace{\left(1 + \delta Z_V^{(2,1,0)}\right)}_{Z_V^{(2,1,0)}}$$

conto perturbativo

$$= g_r \mu^{2-\omega} \left(1 - \frac{g_r^2}{16\pi^2} \left\{ -\frac{2}{3} N_f\, c(R) + \frac{5}{6} C_2(G) - \cancel{C_2(R)} + \cancel{C_2(R)} + C_2(G) \right\} \frac{1}{2-\omega} \right)$$

$$= g_r \mu^{2-\omega} \left(1 - \frac{g_r}{16\pi^2} \underbrace{\left\{ \frac{11}{6} C_2(G) - \frac{2}{3} N_f\, c(R) \right\}}_{\equiv \Delta} \frac{1}{2-\omega} \right)$$

$$\epsilon \equiv 2-\omega$$

non dip. da μ

$$g_B = g_r(\mu)\, \mu^\epsilon \left(1 - \frac{g_r(\mu)^2}{16\pi^2} \frac{\Delta}{\epsilon} \right) \qquad (0)$$

Vogliamo usare questa relazione per calcolare la dipendenza di g_r da μ. Si sceglie μ della scala a cui si vuole fare conto (o esperimento) affinché i $\log(P^2/\mu^2)$ siano $O(1)$; $g_r(\mu)$ corrispondente mi dirà se siamo in regime perturbativo o no (cioè $g_r(\mu) \ll 1$ o $\gg 1$?)

Prendiamo $\mu \frac{d}{d\mu}$ (o)

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} g_r \cancel{\mu^{\epsilon}} \left(1 - \frac{g_r^2}{16\pi^2} \frac{\Delta}{\epsilon} \right) + \epsilon g_r \cancel{\mu^{\epsilon}} \left(1 - \frac{g_r^2}{16\pi^2} \frac{\Delta}{\epsilon} \right)$$

$$- g_r \cancel{\mu^{\epsilon}} \frac{g_r}{8\pi^2} \frac{\Delta}{\epsilon} \mu \frac{d g_r}{d\mu} \quad + \text{higher order in } g_r$$

g_r e $\mu \frac{dg_r}{d\mu}$ sono finiti per $\epsilon \to 0$

$$= \epsilon g_r + \underline{\mu \frac{d g_r}{d\mu}} - \frac{g_r^3}{16\pi^2} \Delta - \frac{3 g_r^2}{16\pi^2} \frac{\Delta}{\epsilon} \underline{\mu \frac{d g_r}{d\mu}} + \dots$$

A ordine zero otteniamo $\mu \frac{d g_r}{d\mu} = - \epsilon g_r + \underbrace{\beta(g_r)}_{\text{subleading}}$

($e \to \mu \frac{dg_r}{d\mu}$ per $\epsilon \to 0$)

$$\Rightarrow \quad 0 = \cancel{\epsilon g_r} - \cancel{\epsilon g_r} + \beta(g_r) - \frac{g_r^3}{16\pi^2} \Delta + \frac{3 g_r^3}{16\pi^2} \Delta \quad + \text{higher order in } g_r$$

$$\Rightarrow \quad \beta(g_r) = - \frac{2 g_r^3 \Delta}{16\pi^2} = - \frac{g_r^3}{16\pi^2} \left(\frac{11}{3} c_2(G) - \frac{4}{3} N_f\, c(R) \right) \tag{$*$}$$

Prendiamo $G = SU(N)$ e $R = N$ $\Rightarrow \begin{cases} c_2(G) = N \\ c(R) = 1/2 \end{cases}$

$$\beta = - \frac{g_r^3}{16\pi^2} \left(\frac{11}{3} N - \frac{2}{3} N_f \right)$$

Per QCD $\quad N = 3 \quad N_f = 6 \quad (u, d, s, c, t, b)$

$$\beta_{QCD} = - \frac{7}{16\pi^2} g_r^3 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{ASINTOTICAM. LIBERA in UV}$$

Per YM $N_f = 0$

$$\beta_{YM} = -\frac{11}{48} C_2(G)\, g_r^3 < 0 \Rightarrow$$ ASINTOTICAM. LIBERA in UV

(QED ha $\beta_{QED} > 0 \Rightarrow$ AS. LIB. in IR)

Ricordiamo che la relazione (#) può essere integrata

$$g_r^2(\mu) = \frac{g_r^2(\mu_0)}{1 + \frac{g_r^2(\mu_0)}{8\pi^2}\left(\frac{11}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}N_f C(R)\right)\ln \mu/\mu_0}$$